

ИЗЪ КНИГЪ
ВОЛОЧАНОВСКОЙ БИБЛИОТЕКИ
ВАСИЛІЯ ВЛАДИМИРОВИЧА
СЕРГІЯ ВАСИЛЬЕВИЧА
"
БОРИСА СЕРГѢЕВИЧА
ШЕРЕТЕВЫХЪ.

РК-8°
98Б

№

П.



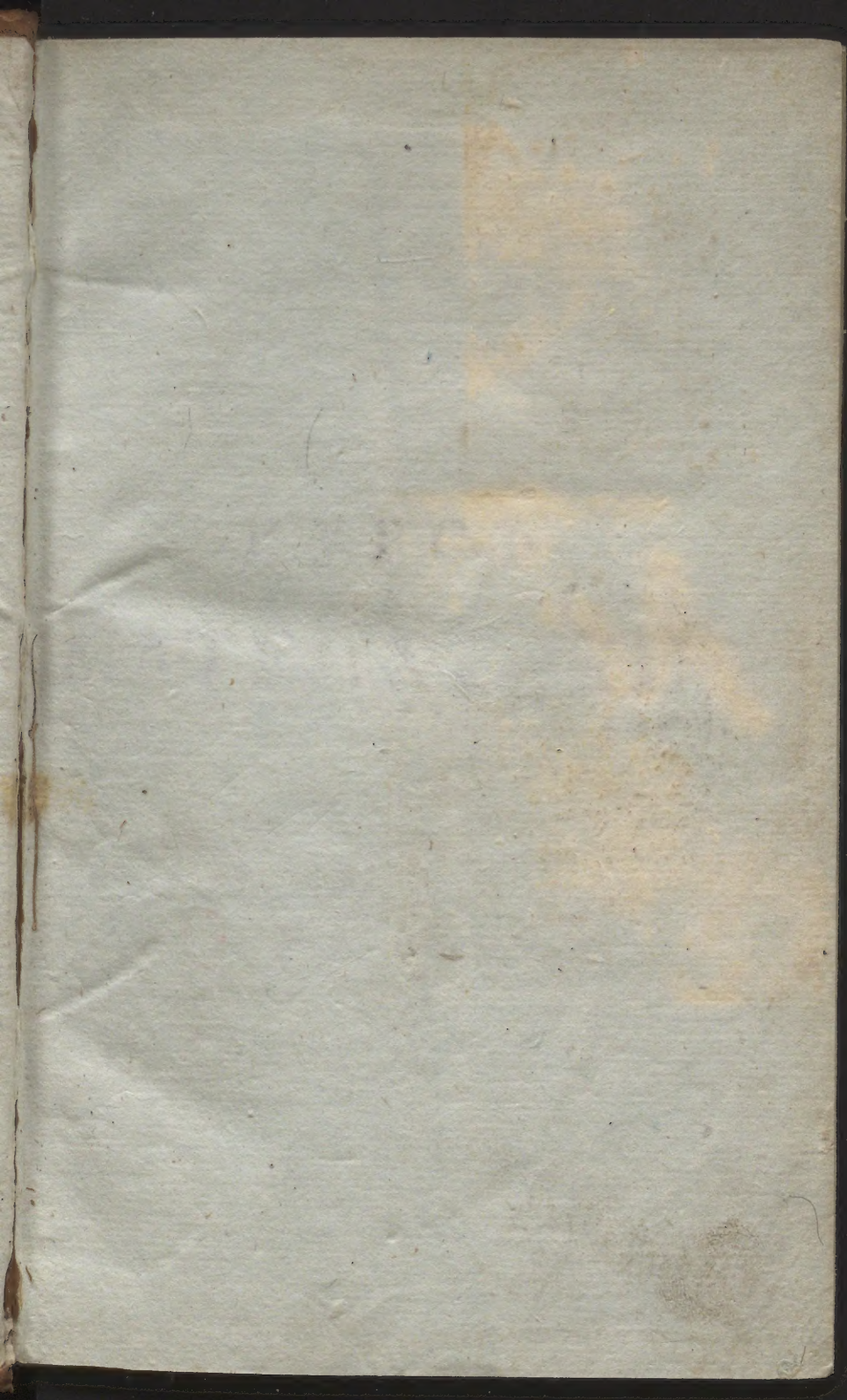
ИКАФЪ

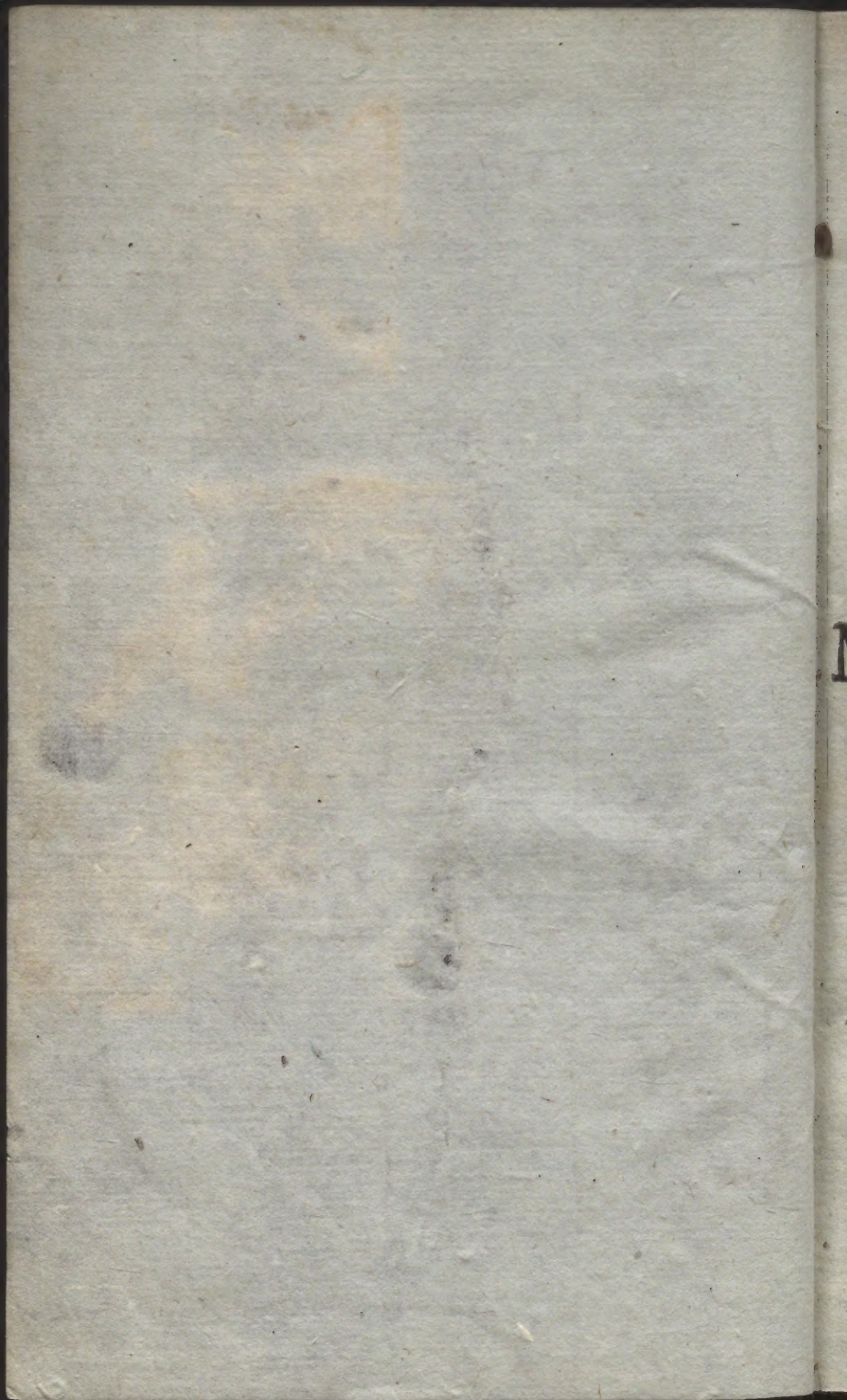
ПОЛКА

№

53

1-й экз.





КУРСЪ

МАТЕМАТИКИ.

W. A. B. CO.

W. A. B. CO.

КУРСЪ МАТЕМАТИКИ

Господина Безу, Члена Французской
Академіи Наукъ, Экзаминатора Воспи-
танниковъ Артиллерійскаго и Морскаго
Корпусовъ, и Королевскаго Цензора.

ПЕРЕВЕДЕНЪ

Васильемъ Загорскимъ

въ

пользу и употребленіе
БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,
Воспитывающагося

въ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСИОНѢ.

Часть Третья,

содержащая въ себѣ

АЛГЕБРУ съ приноровкой ея къ
ГЕОМЕТРИИ и КОНИЧЕСКОЕ
СЪЧЕНІЕ.

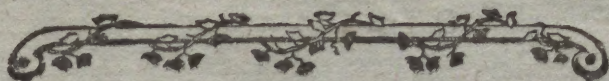
МОСКВА,

Въ Университетской Типографіи,

у Хр. Клаудіа.

1801.

Съ одобренія Московской Цензуры.



О Г Л А В Л Е Н І Е

ПЕРВОЕ ОТДѢЛЕНІЕ,

Стран.

Въ которомъ преподаются правила истисленія Алгебраическихъ количествъ, разсматриваемыхъ вообще.	- - -	1
О начальныхъ дѣйствіяхъ.	- - -	3
— Сложеніи и Вычитаніи.	- - -	4
— Умноженіи.	- - -	8
— Дѣленіи.	- - -	18
— способъ находить для двухъ липперальныхъ количествъ общаго самаго большаго дѣлителя.	- - -	28
— липперальныхъ Дробяхъ.	- - -	31
Объ Уравненіяхъ.	- - -	35
Объ Уравненіяхъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.	- - -	38
Приноровка предыдущихъ правилъ для рѣшенія нѣкоторыхъ простыхъ вопросовъ.	- - -	46
Разсужденія о положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ.	- - -	57
Объ Уравненіяхъ первой степени со многими неизвѣстными.	- - -	65
Объ Уравненіяхъ первой степени съ тремя и большимъ числомъ неизвѣстныхъ.	- - -	70

VI Оглавленіе.

Страд.

Приноровка предыдущихъ правилъ для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ, заключающихъ въ себѣ нѣсколько неизвѣстныхъ.	76
О томъ, въ какихъ случаяхъ данные вопросы остаются неопредѣленными, и въ какихъ бывають они невозможными.	85
— неопредѣленныхъ Задачахъ.	87
Объ Уравненіяхъ второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.	94
Приноровка предыдущаго правила для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ второй степени.	102
О составленіи степеней изъ одночленныхъ количествъ, объ извлеченіи корней ихъ и о представленіи радикальныхъ знаковъ и показателей.	111
— составленіи степеней изъ многочленныхъ количествъ и о извлеченіи корней ихъ.	127
Объ извлеченіи корней изъ количествъ многочленныхъ.	142
О способѣ подходить къ настоящему корню несовершенныхъ степеней literalныхъ количествъ чрезъ приближеніе.	149
Объ Уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными, превосходящихъ первую степень.	155
О двучленныхъ Уравненіяхъ.	159
Объ Уравненіяхъ, которыя рѣшаются на подобіе Уравненій второй степени.	164
О производствѣ или составленіи Уравненій.	165

О перемѣнахъ , кои мѣ могутъ подле- жатъ Уравненія.	173
— рѣшеніи составныхъ Уравненій.	176
Приготовка для третьей степени.	178
Приготовка для четвертой степени.	182
О соизмѣримыхъ дѣлителяхъ Уравненій.	184
— способъ подходить къ настоящимъ кор- нямъ составныхъ Уравненій чрезъ при- ближеніе.	189

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ,

Въ которомъ Алгебра примѣняется къ Ари- метикѣ и Геометріи.	193
Общія свойства Арифметическихъ Прогрессій.	194
О нахожденіи суммы степеней членовъ во всякой Арифметической Прогрессіи.	205
— свойствахъ и употребленіи Геометриче- скихъ Прогрессій.	215
— Геометрической конструкціи Алгебраиче- скихъ количествъ.	222
Разныя Геометрическіе вопросы и рассу- женія , какъ о способѣ выводить изъ нихъ Уравненія , такъ и о различныхъ рѣшеніяхъ сихъ Уравненій.	234
Иныя примѣненія Алгебры къ разнымъ предметамъ.	269
О кривыхъ линияхъ вообще , и о Коническихъ сѣченіяхъ въ особенности.	277
Объ Эллипсисѣ.	287
О Гиперболѣ.	312
— Гиперболѣ между ся Асимптотами.	353

	Стран.
О Параболѣ.	- 540
Разсужденія объ Уравненіяхъ Коническихъ сѣченій.	- 551
Способы приводить всякое Уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными въ Уравненія Коническихъ сѣченій, если только первое будетъ изображать воз- можную вещь.	- 562
Примѣненіе предыдущихъ правилъ для рѣ- шенія нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ во- просовъ.	- 581
Примѣненіе тѣхъ же правилъ для нѣкто- рыхъ опредѣленныхъ вопросовъ.	- 594



А Л Г Е Б Р А.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ,

*Въ которомъ преподаются Правила
Исчисленія Алгебраическихъ
Количествъ.*

1. **Н**аука, называемая *Алгеброю*, показываетъ средства, какъ производить общими правилами рѣшеніе всѣхъ вопросовъ, какіе только могутъ предложены быть о количествахъ.

А дабы правила сіи были общими, то они не должны зависѣть отъ частной величины разсматриваемыхъ количествъ, но отъ свойства каждаго вопроса, и должны быть всегда одинаковы для всѣхъ вопросовъ одного рода.

Изъ сего слѣдуетъ, что Алгебра не должна быть ограничена въ представленіи количествъ тѣми же знаками, какіе употреб-

Часть III.

А

ляеть Ариеметика. Ибо производя рѣшеніе по правиламъ сей послѣдней, не можно видѣть въ заключеніи той дороги, которая къ оному руководствовала. Не можно знать ничего, одно или многія Ариеметическія дѣйствія вывели въ заключеніи 12, попому что сіе число можетъ происходить изъ умноженія 3 на 4, или 2 на 6, или чрезъ сложеніе 5 съ 7, или 2 съ 10, или вообще посредствомъ всякаго другаго совокупленія дѣйствій. Ариеметика преподаетъ правила доходитъ до нѣкоторыхъ заключеній (resultats); но заключенія сіи не могутъ снабжать правилами: Алгебрѣ предоставлено исполнить сіи два предмета, и для того она представляетъ количества общими знаками (знаки сіи состоятъ изъ Азбучныхъ буквъ), которые не имѣя никакого особеннаго отношенія съ числами или другимъ числомъ, представляютъ вообще, что кому угодно, или что надобно имъ представлять. Сіи знаки, находясь предъ глазами во всей выкладкѣ, сохраняющъ, такъ сказать, въ сѣбѣ впечатлѣніе всѣхъ дѣйствій, чрезъ которыя они перешли, или по крайней мѣрѣ представляютъ въ результатахъ сихъ дѣйствій, какой должно держаться дороги для достигненія той же цѣли легчайшими средствами. Но мы не наѣрены распространяться здѣсь въ дальнѣйшемъ открытіи появ-

тія обѣ Алгебрѣ; послѣдствіе сочиненія покажемо его само собою.

Въ Алгебрѣ не только представляются сами количества общими знаками, но также ихъ взаимное между собою отношеніе, равно какъ различныя дѣйствія, производимыя надъ ними; словомъ, въ ней все совершается представленіемъ: почему говоря о сдѣланномъ ею какомъ нибудь дѣйстви, не должно разумѣть, что въ самой вещи дѣйствіе было сдѣлано, но что количество получило другой новой видъ. Поступая впередъ покажемъ, какъ представляются различныя отношенія количествъ.

О Начальныхъ Дѣйствіяхъ, которыя производятся въ Количествахъ, разсматриваемыхъ вообще.

2. Алгебра производитъ въ количествахъ, изображенныхъ буквами, тѣ же дѣйствія, какія Ариметика въ числахъ: то есть, количества сіи складываются, вычитаются, умножаются, дѣлятся и проч. Но Алгебраическія дѣйствія различествуютъ отъ Ариметическихкихъ тѣмъ, что въ заключеніяхъ или результатахъ ихъ представляются одні показанія Ариметическихкихъ дѣйствій.

О Сложеніи и Вычитаніи.

3. Для сложенія подобныхъ количествъ не находится никакого особеннаго правила; потому что для сложенія количества, представляемаго чрезъ a съ тѣмъ же количествомъ a , должно написать $2a$. Для сложенія $2a$ съ $3a$, надлежитъ написать $5a$, и такъ далѣе.

Чтожь касается до неодиначихъ или неподобныхъ количествъ, которыя изображаются различными буквами, то дѣйствіе сложенія ихъ представляется однимъ показаніемъ чрезъ слѣдующій знакъ $+$, которой произносится *плюсъ* или *съ*.

И такъ для сложенія количества, изображеннаго чрезъ a , съ количествомъ, представляемымъ буквою b , не можно ничего другаго сдѣлать, какъ написать $a + b$; почему результатъ или заключеніе сего дѣйствія сслагается не извѣстныиъ до сихъ поръ, пока не будутъ извѣстны въ общиноиъ количества изображенныя чрезъ a и b . Еслили a значить 5, а b 12, то $a + b$ означаетъ 17.

Равнымъ образомъ при сложеніи	- - -	$5a + 3b$
съ	- - -	$9a + 1c$
и съ	- - -	$9b + 3d$

должно написать	- - -	$5a + 3b + 9a + 1c + 9b + 3d$
и по приведеніи	- - -	$14a + 12b + 1c + 3d$

чрезъ совокупленіе подобныхъ количествъ.

4. То, что сказано о сложеніи, равно принадлежитъ и до вычитанія. Еслили количества бывають подобны, то при вычитаніи ихъ нѣтъ особеннаго правила; ибо отнимая $2a$ изъ $5a$, въ остаткѣ находимъ $3a$.

Но въ неподобныхъ количествѣхъ вычитаніе изображается показаніемъ чрезъ знакъ —, которой произносится словами *минусъ* или *безъ*.

Почему изъ a вычитая b , пишемъ $a - b$.

Изъ $5a$ отнимая $3b$, пишемъ — — — $5a - 3b$.

Если изъ	— — — — —	$9a + 6b$
требуетъ вычесть	— — — — —	$5a + 4b$
то должно написать	— — — — —	$9a + 6b - 5a - 4b$
и по приведеніи	— — — — —	$4a + 2b$

5. Число, стоящее предъ буквою, называется *Кoeffиціентомъ* ея; и такъ въ $3b$, 3 есть кoeffиціентъ буквы b . Когда буква должна имѣть единицу кoeffиціентомъ, тогда сей кoeffиціентъ не ставится: на пр. вычитая $2a$ изъ $3a$, въ остаткѣ получимъ $1a$, и потому пишемъ только a . Совсѣмъ тѣмъ не должно почитать, чтобъ буква, при которой не находится кoeffиціента, не имѣла его совсѣмъ; онъ бываетъ въ такомъ случаѣ единица, или 1.

6. Мало нужды до порядку сложенныхъ или вычтенныхъ количествъ; ихъ можно составлять всячески. На примѣръ при сложении a съ b , можно одинаково написать $a + b$, или $b + a$; и при вычитаніи b изъ a , можно написать или $a - b$, или — $b + a$.

7. Замѣтимъ здѣсь, что количество, предъ которымъ не находится никакого знака,

почищается за такое, которое имѣетъ знакъ $+$; а есть тоже, что $+a$: въ количествѣ, первое мѣсто въ шпрукѣ занимающемъ, обыкновенно уничтожается знакъ $+$; но еслии сей знакъ долженъ быть $-$, то всегда поставляется.

8. Когда по окончаніи дѣйствія надобно дѣлать приведеніе, то можетъ случиться, что количество съ знакомъ $-$ будетъ имѣть коэффициентомъ больше того, какой находится въ подобномъ количествѣ съ знакомъ $+$; однако въ обоихъ случаяхъ надлежитъ поступать по сему общему правилу: *Напиши напередъ всѣ части данныхъ для сложенія Алгебраическихъ количествъ по порядку, какъ онѣ слѣдуютъ, съ тѣми же знаками, какіе при нихъ находятся; потомъ одинакія количества приведи въ одно, совокупивъ съ одной стороны всѣ съ знакомъ $+$, а съ другой всѣ съ знакомъ $-$; наконецъ меншой результатъ вычти изъ большаго, и предъ остаткомъ поставь тотъ знакъ, какой находился при большемъ.*

На примѣръ, еслии по окончаніи дѣйствія выйдетъ $14a + 12b + 2c + 3d + a + b + 4d - 4c$, то количество сіе приведеніе будетъ въ $15a + 13b - 2c + 7d$, въ которомъ на мѣсто $2c - 4c$, найдящихся въ первомъ, должно поставить $- 2c$; потому что вы-

чинная $4c$ изъ количества, въ которомъ находится только $2c$, надлежитъ означить, что слѣдуетъ еще вычитать $2c$ изъ суммы другихъ количествъ.

П Р И М Ъ Р Ъ.

Требуется сложить слѣдующія четыре количества.

$$\begin{array}{r} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Сумма} - - 5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b \\ - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e \end{array}$$

Дѣлая приведеніе, получаю въ буквахъ a , $15a$; въ b съ одной стороны $+7b$, а съ другой $-9b$, и слѣд. $-2b$ въ остаткѣ; въ c съ одной стороны имѣю $-4c$, а съ другой $+6c$, и слѣд. въ остаткѣ $+2c$; равнымъ образомъ приводя и другія количества, получаю наконецъ $15a - 2b - 3c + 2d - 6e$.

9. Количества, раздѣленные между собою знаками $+$ и $-$, называются *членами* этихъ количествъ, коихъ составляютъ части.

10. Количество называется *одночленнымъ*, *двучленнымъ*, *трехчленнымъ* и проч. судя по тому, какъ оно состоитъ изъ 1 или 2 или 3 и проч. членовъ; количество же, состоящее изъ многихъ членовъ, коихъ число не опредѣляется, именуется вообще *многочленнымъ*.

11. Что касается до вычитанія Алгебраическихъ количествъ, то вошъ оному общее правило: *перемѣни всѣ знаки въ членахъ вычитаемого, то есть, перемѣни $+$*

на —, а — на +; сложи на послѣдокъ количество, такимъ образомъ перемѣненное, съ уменьшаемымъ, и сдѣлай приведеніе.

П Р И М Ъ Р Ъ.

Изъ - - - - $6a - 3b + 4c$
требуется вычесть - - $5a - 5b + 6c$

Пишу - - - - $6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$,
и по приведенію, въ остатокъ получаю $a + 2b - 2c$.

Дабы увѣришься въ истиннѣ сего правила, возмемъ примѣръ вопроса. Положимъ, что изъ a надобно вычесть b , для сего стоимъ только написать $a - b$, и въ чемъ нѣтъ сомнѣній; но когда изъ a требуется вычесть $b - c$, то должно написать, говорю я, $a - b + c$; ибо явствуетъ здѣсь, что не дѣлая b сабауешь вычитаніе, но b , уменьшенное количествомъ c ; слѣд. для познанія сего объясненія излишка, надлежитъ послѣ прибавить его; а b , c должно сложить, и написать пакъ $a - b + c$, что есть, надлежитъ перемѣнить знаки во всѣхъ членахъ вычитаемаго.

12. Количества, предъ которыми стоитъ знакъ +, называются *положительными*; а шъ, предъ которыми находишь знакъ —, называются *отрицательными*. Въ послѣдствіи мы будемъ входить въ нѣкоторыя подробности о свойствахъ и употребленіи сихъ количествъ, разсматривая ихъ по особенностямъ.

О У м н о ж е н і и.

13. Алгебраическое умноженіе требуетъ особливыхъ замѣчаній, какихъ не было по-

казано въ Арифметическомъ; ибо въ производствѣ его должно имѣть вниманіе не только на самыя количества, но и на знаки.

Впрочемъ разсматривая одни числительныя величины количествъ, представленныхъ буквами, надлежитъ имѣть то же понятіе объ Алгебраическомъ умноженіи, какое и объ Арифметическомъ; такъ на пр. умножить a на b , значитъ взять количество a столько разъ, сколько находится единицъ въ количествѣ b .

14. А какъ предметомъ поставляется въ Алгебрѣ дѣлать или представлять умноженіе независимо отъ числительной величины количествъ, то должно для сего согласиться въ знакахъ, которые бы показывали умноженіе.

Сверхъ знака \times , которымъ, какъ сказано въ Арифметикѣ, означаетъ умноженіе, употребляется также точка, которая полагается между двумя умножаемыми количествами; такимъ образомъ $a.b$ и $a \times b$ значатъ одно.

Означается еще умноженіе (по крайней мѣрѣ въ одночленныхъ количествахъ) просто безъ поставленія знака между множимымъ и множителемъ. На примѣръ всѣ сіи при изображенія $a \times b$, $a.b$, ab показываютъ, что a должно умножить на b . Последнее есть самое употребительное.

15. И такъ при умноженіи ab на c , должно написать abc . Для умноженія ab на cd , напиши $abcd$, и такъ даѣе. Чѣмъ касается до расположенія буквъ, то не нужно наблюдать въ немъ никакого порядка, пошому что произведеніе выходитъ всегда одинаково, какимъ бы образомъ онѣ ни были умножены.

16. Изъ такого представленія одноплеčnýchъ количествъ слѣдуетъ, что произведеніе, выходящее изъ умноженія многихъ Алгебраическихъ одноплеčnýchъ количествъ, должно содержать въ себѣ всѣ буквы какъ множимаго, такъ и множителя.

17. Еслии умножаемыя количества состоятъ изъ одинакой буквы, то сія буква въ произведеніи должна написана быть столько разъ, сколько она находится во всѣхъ производителяхъ или факторахъ, какое бы впрочемъ число не было умножаемыхъ количествъ.

Такимъ образомъ a умноженное на a , должно бы дать aa произведеніи aa ; aa умноженное на aaa должно бы дать $aaaaa$; равнымъърн aa умноженное на aaa и еще умноженное на a , должно бы дать $aaaaaa$.

Однакожъ въ семъ случаѣ согласились не повторять одинакой буквы, а пишутъ ее одинъ разъ, и означать цифрою, копорая называется показателемъ и поставляется сверху надъ буквою вправо, сколько разъ

та буква бываетъ производилемъ, или сколько разъ она должна быть написана.

Почему въ мѣсто aa должно написать a^2 , въ мѣсто aaa написать a^3 ; въ мѣсто $aaaa$ написать a^4 , и такъ и проч.

Припомнимъ впередъ, что *показатель буквы значитъ то, сколько разъ та буква бываетъ факторомъ въ приведеніи.*

Въ a^3b^2c находится три произвидителя разныхъ величинъ, именно a, b, c ; но изъ сихъ буквъ первая служить сама три раза производилемъ, вторая два, а третья одинъ разъ; ибо a^3b^2c тоже значитъ въ самомъ дѣлѣ, что $aaabbc$.

18. Поелику показатель представляетъ, сколько разъ количество бываетъ производилемъ; слѣд. онъ означаетъ также въ какую степень количество возведено.

Почему показатель 5 въ a^5 значитъ, что a возведено въ пятую степень.

19. И такъ не надобно за одно принимать показателя съ коэффициентомъ, на примѣръ a^2 съ $2a$, a^3 съ $3a$; коэффициентъ 2 въ $2a$ показываетъ, что a сложено съ a , то есть, что $2a$ равно $a + a$; но показатель 2 въ a^2 означаетъ, что буква a должна быть написана два раза безъ всякаго знака, что она умножена сама на себя, или наконецъ, что она служитъ производилемъ два раза; то есть, a^2 то же, что $a \times a$, такъ

что естѣли бы a равно было на пр. 5, то $2a$ значило бы 10, но a^2 25.

20. Отсюда явствуетъ, что при умноженіи двухъ количествъ одночленныхъ, имѣющихъ общія или одинакія буквы, можно сократить дѣйствіе сложеніемъ всѣхъ показателей подобныхъ буквъ какъ множимаго, такъ и множителя.

Почему при умноженіи a^5 на a^3 , пишу a^8 , то есть, пишу букву a съ показаніемъ надъ нею обоихъ показателей 5 и 3, сложенныхъ вмѣстѣ. Равнымъ образомъ при умноженіи a^3b^2c на a^4b^3cd , пишу $a^7b^5c^2d$, помнявая напередъ по порядку всѣ разныя буквы $abcd$, и по помѣ приписывая первой показателемъ 7, сумму показателей 3 и 4; второй 5 сумму двухъ показателей 2 и 3; а третьей 2 сумму двухъ показателей 1 и 1; хотя показателемъ буквы c и не означенъ, одинъ какъ онъ подразумѣвавшяся 1, ибо c служитъ производителемъ одинъ разъ.

И такъ показателемъ всякой буквы, надъ которой его не находится, разумѣть должно 1; и обратно во всякомъ случаѣ, когда буква должна имѣть показателемъ 1, можно не писать его.

Правило сіе служитъ вообще для всѣхъ одночленныхъ количествъ.

21. Когда предъ одночленными количествами стоятъ цифры, то есть, коэффициенты; тогда должно начинать дѣланіе умноженіе съ коэффициентовъ, и такое умно-

женіе производить по Ариѣметическимъ правиламъ.

При умноженіи $5a$ на $3b$, умножаю сперва 5 на 3, потомъ a на b , и получаю $15ab$ въ произведеніи. Равнымъ образомъ при умноженіи $12a^3b^2$ на $9a^4b^3$, пишу $108a^7b^5$.

22. По предположеніи сихъ правилъ, приступимъ къ умноженію разнородныхъ количествъ. Въ производствѣ сего умноженія надлежитъ слѣдовать тому же порядку, какой показанъ былъ въ Ариѣметикѣ для чиселъ о многихъ цыфрахъ, то есть, надлежитъ умножать каждой членъ множимаго на каждой членъ множителя, наблюдая при томъ правила, предписанныя для одночленныхъ количествъ. Замѣтимъ еще, что здѣсь не бываемъ принуждены, какъ въ Ариѣметикѣ, дѣлать умноженіе съ правой руки къ лѣвой; въ Алгебрѣ все равно, съ правой ли къ лѣвой будешь умножать, или съ лѣвой къ правой: да мы и послѣдуемъ сему послѣднему способу, ибо онъ употребительнѣе.

П Р И М Ъ Р Ъ I.

Требуется умножить	— — —	$a + b$
на	— — — — —	$c + d$
произведеніе — — — — — $ac + bc + ad + bd$		

т. е. Множу a на c , что (14) дастъ ac . 2 е. Множу b на c , и получаю bc . Складываемъ второе произведеніе съ первымъ, соединяя ихъ знакомъ $+$, и находимъ $ac + bc$ за произведеніе $a + b$ на c .

Умножаю равномерно a и b на d , отъ чего выхо-
дити $ad + bd$, а по соединеніи сего произведенія
съ предыдущимъ получаю $ac + bc + ad + bd$. Ибо
множишь $a + b$ на $c + d$ значишь не столько брашь
 a , но и b столько разъ, сколько находишься во b е
единицъ въ $c + d$, то есть, столько разъ, сколько
находишься единицъ въ c , съ числомъ разъ, сколько
ихъ есть въ d .

П Р И М Ъ Р Ъ II.

$$\begin{array}{rcl} \text{Требуешь умножить} & - & a - b \\ \text{на} & - & c - d \\ \hline \text{Произведеніе} & - & ac - bc - ad + bd. \end{array}$$

По умноженіи a на c , что дѣлаешь ac , множу
 b на c , отъ чего выходишь bc ; но въ мѣсто, что въ
скалываешь послѣднее произведеніе съ первымъ, я
его вычитаю, пошому что умножая цѣлое a , какъ
дѣлаа въ предыдущемъ примѣрѣ, умножаю въ немъ
также и лишекъ количесва b , которымъ a должно
быть уменьшено; слѣд. должно отнять отъ ac ко-
личество b помноженное на c , то есть, отнять bc .

Равнымъ образомъ изъ умноженія $a - b$ на d
произойдетъ $ad - bd$; но какъ знакъ сего множите-
ля есть $-$; то слѣдуетъ второе сие произведеніе
вычесть изъ перваго, что (11) сдѣлано будетъ такъ
 $ac - bc - ad + bd$.

Поелику множитель $c - d$ есть меньше цѣлаго
с количествомъ d , то надлежитъ взять множимое
столько разъ, сколько находишься единицъ въ c по
уменьшеніи его количествомъ d . Но ежели возьмешь
вдругъ $a - b$ столько разъ, сколько находишься еди-
ницъ въ цѣломъ c , то безъ сумишнѣя выдешъ про-
изведеніе больше настоящей величины $a - b$, взя-
тую столько разъ, сколько d имаетъ въ себѣ еди-
ницъ; слѣд. надлежитъ вычесть произведеніе $a - b$
на d .

23. Еслии обратимъ вниманіе на зна-
ки членовъ, составляющихъ цѣлое произве-
ніе $ac - bc - ad + bd$, и когда сравнимъ

ихъ съ знаками членовъ множимаго и множителя, то примѣшымъ 1.^е Что по умноженіи члена a съ знакомъ $+$ на членъ c съ знакомъ $+$, въ произведеніи выходитъ ac съ знакомъ $+$.

2.^е Что членъ b съ знакомъ $-$, умноженный на членъ c съ знакомъ $+$, даетъ въ произведеніи bc съ знакомъ $-$.

3.^е Что членъ a съ знакомъ $+$, помноженный на d съ знакомъ $-$, даетъ произведение ad съ знакомъ $-$.

4.^е Что наконецъ членъ b съ знакомъ $-$, умноженной на членъ d , которой также съ знакомъ $-$, даетъ въ произведеніи членъ bd съ знакомъ $+$.

И такъ дѣлая впередъ частныя умноженія, можемъ легко узнавать, какъ поступать съ особыми произведеніями, складывать ли ихъ, или вычитать; стоимъ для сего припомнимъ намъ два слѣдующія правила, которыя выходятъ изъ сдѣланныхъ теперь замѣчаній.

24. Когда оба умножаемые члена будутъ имѣть одинакіе знаки, то есть, будутъ оба съ $+$, или оба съ $-$, тогда произведение ихъ ставится всегда съ знакомъ $+$. Когдажъ напротивъ они будутъ съ разными

знаками, то есть, первой съ $+$, а другой съ $-$, или первой съ $-$, а второй съ $+$, тогда произведение ихъ ставится всегда съ знакомъ $-$.

При помощи сихъ правилъ можемъ теперь дѣлать всякое Алгебраическое умноженіе. И поступая методически, будемъ во первыхъ въ виду имѣть правило о знакахъ, потомъ о коэффициентахъ, наконецъ о буквахъ и показателяхъ.

П Р И М Ъ Р Ъ III.

Требуется умножить $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
на $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{array}$$

Произведеніе $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

25. Всякой, кто хочетъ утвердиться въ практикѣ сего правила, можетъ брать примѣры изъ таблицы, которая слѣдуетъ помѣщать за дѣленіемъ; вотъ и замѣчанія на нѣкоторыя изъ нихъ.

Въ первомъ умножена величина $a + b$, представляющая вообще сумму двухъ количествъ, на величину $a - b$, представляющую вообще разность ихъ, и въ произведеніи найдено $a^2 - b^2$, что изображаетъ разность квадрата перваго количества съ квадратомъ другаго, или разность квадратовъ двухъ количествъ. Слѣд. послѣ всего можно заключить вообще, что изъ умноженія суммы двухъ количествъ на разность ихъ, въ произведеніи выходитъ всегда разность квадратовъ тѣхъ же количествъ. Возьмемъ какія нибудь два чи-

сла, на пр. 5 и 3, сумма ихъ 8, а разность 2; по умноженіи сплѣ чиселъ 8 и 2 между собою, въ произведеніи вышедши 16, число, которое и въ самомъ двѣхъ по деленіи на разность квадрата 5 на кв. деленіи 3хъ, тѣ есть, 25 на 9; и обратно можно почитать всегда разность квадратовъ двухъ количествъ за произведеніе, бывшее изъ умноженія суммы тѣхъ двухъ количествъ на разность ихъ. Такимъ образомъ $b^2 - c^2$, разность квадрата b съ c , т. е. c , происходитъ изъ умноженія $b + c$ на $b - c$. Сія для предложенія будущъ намъ весьма полезна со временемъ.

Можно по сему повспѣшавшемуся съ нами случаю замѣтить, какъ Алгебра опирается на общія истины.

Второй примѣръ показываетъ самымъ общимъ и простымъ образомъ то, что сказано было въ Ариеменикѣ о составленіи квадрата, и именно: квадратъ суммы $a + b$ двухъ количествъ состоитъ изъ квадрата a^2 первого, изъ удвоеннаго $2ab$ произведенія первого количества на второе, и изъ квадрата b^2 второго.

Третій подтверждаетъ сказанное также въ Ариеменикѣ о составленіи куба, то есть, что изъ умноженія $a^2 + 2ab + b^2$ квадрата изъ $a + b$ на тоже $a + b$ выйдетъ кубъ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, котораго первый членъ представляетъ кубъ изъ a , второй членъ, что $3a^2b$ есть упрощенное произведеніе квадрата a на b ; третий образъ являющій, что $3ab^2$ состоитъ изъ упрощеннаго произведенія a на квадратъ b ; наконецъ b^3 есть кубъ изъ b .

26. Для показанія умноженія между двумя разнородными количествами, заключается обыкновенно каждое изъ нѣхъ количествомъ въ скобахъ, и полагается между ими какойнибудь изъ объявленныхъ (14) знаковъ, а иногда не полагается никакого. Для

означенія, что все количество $a^2 + 3ab + b^2$ должно быть умножено на $2a + 3b$, пишется $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$, или $(a^2 + 3ab + b^2) \cdot (2a + 3b)$, или просто $(a^2 + 3ab + b^2) (2a + 3b)$. Иногда вмѣсто этого, чтобы заключать умножаемые количества въ скобахъ, покрываютъ каждое изъ нихъ чертою такимъ образомъ: $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$.

27. Много встрѣчается случаевъ, гдѣ нужнѣе показывать умноженіе, нежели его дѣлать, хотя и не можно предписатьъ именно когда такъ должно поступать; ибо сіе зависитъ отъ обстоятельствъ. Совсѣмъ тѣмъ въ послѣдствіи не преминемъ замѣтить такого рода случаевъ, а на сей разъ скажемъ довольно надежно, что умноженіямъ гораздо лучше дѣлать показаніе тогда, когда они бывають послѣдуемы дѣленіемъ, пошому что послѣднѣе дѣйствіе, какъ увидимъ ниже, производится часно однимъ уничтоженіемъ производителей, сблихъ дѣлителю и дѣлителю; общіе же сіи производители легче познаются при показаніи умноженія.

О ДѢЛЕНІИ

28. Способъ дѣлать дѣленіе зависитъ много отъ знаковъ, которые употреблены были при умноженіи; цѣль же его есть та, какая и въ Ариѳметикѣ.

29. Когда предлагаемое количество для дѣленія не имѣетъ никакой общей буквы съ дѣлителемъ, въ такомъ случаѣ не можно производить дѣйствія; все дѣло состоитъ въ показаніи, то есть, должно написать дѣи-
теля подъ дѣлимымъ въ видѣ дроби, раздѣ-
ливъ ихъ между собою чертою.

Для означенія, что a должно раздѣлить на b , пишется $\frac{a}{b}$ и выговаривается a раздѣленное на b ; для показанія, что $aa + bb$ должно раздѣлить на $c + d$, пишется $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30. Если дѣлимое и дѣлитель состо-
ятъ изъ одночленныхъ, и когда всѣ буквы, на-
ходящіяся въ дѣлителѣ, находящія также и
въ дѣлимомъ; тогда дѣленіе производится
самымъ дѣломъ по слѣдующему правилу:
*уничтожь въ дѣлимомъ всѣ буквы, которыя
найдутся одинаковы съ буквами дѣли-
теля; оставшіяся буквы представятъ ча-
стное.*

Для раздѣленія ab на a , уничтожаю a въ дѣли-
момъ ab , и получаю b въ частномъ. Для раздѣ-
ленія abc на ab , уничтожаю ab въ дѣлимомъ, и полу-
чаю c въ частномъ.

Поелику (14) написанныя буквы безъ
всякаго между ими знака, почитаются за
производителей того количества, въ которомъ

они содержатся; слѣд. буквы дѣлителя, одинакія съ буквами дѣлимаго, должны быть производимыми въ семъ дѣлимомъ. Но мы видѣли въ Ариометикѣ, что по раздѣленіи произведенія на какого нибудь изъ его факторовъ, въ частномъ выходитъ всегда другой факторъ; и такъ частное должно состоять изъ буквъ дѣлимаго, не подобныхъ буквамъ дѣлителя.

31. И такъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, что при дѣленіи такихъ количествъ, въ которыхъ будучи находишься показатели, должно поступать по слѣдующему правилу, именно: *надлежитъ вычесть показателя каждой буквы дѣлителя изъ показателя одинакой буквы дѣлимаго.*

Для раздѣленія a^3 на a^2 , вычитая 2 изъ 3, въ остатокъ 1. и слѣд. получаю a^1 или просто a въ частномъ. Равнообразно по раздѣленіи $a^4 b^3 c^2$ на $a^2 b c$, въ частномъ выходитъ $a^2 b^2 c$.

Ибо нѣтъ сомнѣнія, что $\frac{a^3}{a^2}$ тоже что $\frac{aaa}{aa}$; но сие послѣднее изобретеніе, по означеніи обѣихъ буквъ у дѣлимаго, превращается (30) въ a .

32. Еслии въ дѣлимомъ и дѣлителѣ случатся общія буквы съ одинаковыми показателями, то по раздѣленіи выходитъ въ частномъ общія тѣ буквы съ показателемъ нуль.

Почему a^3 раздѣленное на a^3 , дѣлаетъ a^0 ; а по раздѣленіи $a^3b c^2$ на $a^2b c^2$ выходитъ $a^1 b^0 c^0$, или ab^0c^0 .

Можно въ семъ случаѣ не писать буквъ, имѣющихъ показателемъ 0; ибо каждая изъ нихъ равна единицѣ. Истинна сего явствуетъ изъ того, что при дѣленіи a^3 на a^3 сыскивается, сколько разъ a^3 содержитъ въ себѣ a^3 ; но безъ сумнѣнія первое количество содержитъ въ себѣ второе 1 разъ, слѣд. частное должно состоять изъ 1; съ другой стороны по раздѣленіи a^3 на a^3 выходитъ a^0 , слѣд. a^0 равно 1. По чему вообще *всякое количество съ показателемъ 0 равно 1.*

33. Еслили какія буквы дѣлителя не сходны съ буквами дѣлимаго, и при томъ нѣкоторые показатели дѣлителя превышаютъ показатели подобныхъ буквъ дѣлимаго; тогда въ точности не можно сдѣлать дѣленія, но производится оно показаніемъ, какъ было сказано (22). Можно однакожъ частное или дробное сіе количество представить въ простѣйшемъ видѣ. Правило, которому послѣдуютъ въ семъ случаѣ, велитъ уничтожить въ дѣлимомъ и дѣлителѣ общія буквы съ одинаковыми показателями; чтожъ касается до общихъ буквъ съ разными показателями, то замарывать или уничтожать одну часть

ко пу, которая будетъ съ меньшимъ показателемъ, и уменьшать одинакимъ количествомъ показателя другой.

На примѣръ данное количество $a^5 b^3 c^3$ раздѣлить на $a^2 b^3 c^4$, напиши $\frac{a^5 b^3 c^3}{a^2 b^3 c^4}$, и послѣ приведи въ простѣйшій видъ такъ: замарай a^2 въ дѣлитель, и поставь только a^3 въ делимомъ; уничтожь b въ делимомъ, и напиши b^2 въ дѣлитель; наконецъ уничтожь c^3 въ делимомъ, и напиши просто c въ дѣлитель; послѣ чего выходишь $\frac{a^3}{b^2 c}$. Равнымъ образомъ $\frac{a^2 b^5 c^3}{a^3 b^2 c^4}$ по сокращеніи превращается въ $\frac{b^3 c}{a}$.

Когда по такомъ дѣйствиіи не остается никакой буквы въ дѣлимомъ, тогда на мѣсто ея ставится единица.

Почему $\frac{a^2}{a^3}$ приведено будемъ въ $\frac{1}{a}$.

Причину сего правила не трудно понять изъ вышеказаннаго; ибо уничтожая, какъ здѣсь предписывается, одинакое число подобныхъ буквъ въ дѣлимомъ и дѣлитель, значить дѣлитель на одно количество каждой членъ дроби, изображающей частное. Но такое дѣйствіе не перемѣняетъ величины дроби, а только что приводитъ ее въ простѣйшій видъ; сіе явствуетъ изъ Ариометики.

34. До сихъ поръ мы не обращали вниманія на коэффициентовъ, коихъ могутъ

имѣть дѣлимое или дѣлитель, или оба вмѣстѣ. Правило, которому послѣдуютъ въ разсужденіи коэффициентовъ, величій дѣлитель ихъ также, какъ въ Арифметикѣ; когдажъ не можно сдѣлать дѣленія въ точности, то поставя ихъ въ видѣ дроби, которую приводить въ простѣйшее значеніе, еслии возможно.

На примѣръ при раздѣленіи $8a^3b$ на $4a^2b$, дѣлю 8 на 4 , и въ частнѣ нахожу 2 ; дѣлю потомъ a^3b на a^2b , и въ частномъ получаю a ; слѣд. $2a$ будетъ изображать цѣлое частное.

При раздѣленіи $8a^3b^2$ на $6ab$, пишу $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, и привожу къ $\frac{4a^2b}{3}$.

35. Предписанное (33) правило служитъ вообще какъ для такого дѣленія, въ которомъ дѣлимое съ дѣлителемъ состоятъ изъ одночленныхъ количествъ, такъ и для такого, въ которомъ они будутъ разнородныя или многочленные, лишь бы въ семъ послѣднемъ случаѣ общія буквы дѣлимаго и дѣлителя были также одинаковы во всѣхъ членахъ, раздѣленныхъ знаками $+$ и $-$.

На примѣръ при раздѣленіи $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ на $a^3 - 5a^2b$, частное $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$ приведено будетъ въ количество $\frac{a^3 - 5a^2b}{a^3 - 5a^2b} \cdot 5b^3$ уничтоженіемъ a^2 общаго произвождителя во всѣхъ членахъ какъ дѣлимаго, такъ и дѣлителя.

36. Ежели дѣлимое съ дѣлителемъ будутъ разнородныя, то не можно предпоставить общихъ правилъ узнаванъ съ одного взгляду, сдѣластся ли дѣленіе въ почтеніи или нѣтъ. Но чтобы увѣряться въ этомъ и паче частиное, то надлежитъ производить слѣдующее дѣйствіе.

1.^е Поставъ въ одну строку дѣлимое съ дѣлителемъ и *расположи* члены ихъ относительно къ одной общей буквѣ, то есть, напиши члены по порядку величинъ ихъ тѣмъ, въ которыхъ одинакая буква будетъ имѣть показателей посепенно меньше,

2.^е Расположивъ такимъ образомъ, отдели дѣлимое отъ дѣлителя черною, и приступай къ дѣленію, *взявъ* только первой членъ дѣлителя, которой дѣли по предписаннымъ правиламъ (30 и слѣд) на первой членъ дѣлителя; частное напиши подъ дѣлителемъ,

3.^е Умножь попеременно найденнымъ частнымъ все члены дѣлителя, и произведенія ихъ поднеси подъ дѣлимое, перемѣнивъ у всѣхъ знаки.

4.^е Подчеркни все, и сдѣлавъ приведеніе членамъ, которые найдутся подобными въ дѣлимомъ и произведеніи, напиши остатокъ

внизу, и начиная второе дѣленіе тѣмъ же порядкомъ, взявъ за первой членъ тотъ изъ оставшихся, которой будетъ имѣть большаго показателя.

Въ разсужденіи знаковъ, находящихся предъ членами дѣлимаго и дѣлителя, должно замѣнить здѣсь тоже правило, какое въ умноженіи, то есть . . .

Когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинакой знакъ, тогда частное выходитъ всегда съ знакомъ $+$.

Когдажъ напротивъ они будутъ съ противными знаками, тогда частное получаетъ знакъ $-$.

Сіе правило о знакахъ основывается на томъ, что по умноженіи частнаго на дѣлителя, въ произведеніи выходитъ дѣлимое. Слѣд. частное должно имѣть такіе знаки, чтобы по умноженіи его на дѣлителя, выходило дѣлимое съ тѣми же знаками; а сіе допущеніе не минуемо утверждаетъ предписанное теперь правило.

Для наблюденія порядка, надлежитъ во первыхъ смотрѣть на знаки, потомъ дѣлить коэффициенты, на послѣдокъ буквы.

ПРИМѢРЪ

Требуется раздѣлить $aa - bb$ на $b + a$.

Располагаю дѣлимое съ дѣлителемъ относительно къ той или другой буквѣ изъ двухъ a и b , на прим. относительно къ a ; и пишу какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{r}
 \text{Дѣлимое} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad aa - bb \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b \text{ Дѣлитель} \\ a - b \text{ Частное} \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad - aa - ab \\
 \hline
 \text{Остатокъ} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad ab - bb \\
 \quad \quad \quad + ab + bb \\
 \hline
 \text{Остатокъ} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 0
 \end{array}$$

Поскольку первые члены aa и a дѣлимаго и дѣлителя находясь съ знакомъ $+$, и потому въ частномъ должно поставить $+$; но какъ это начальнй членъ, то можно знакъ сей и опустить.

Дѣлю aa на a ; въ частномъ выходитъ a , которое пишу подъ дѣлителемъ.

Умножаю попеременно оба члена a и b дѣлителя первымъ членомъ a частнаго, и поднесу произведенія aa и ab годъ дѣлимое съ знакомъ $-$ противнымъ тому, какой вышелъ изъ умноженія; потому что произведенія сии должно вычитать изъ дѣлимаго.

Дѣлаю приведеніе уничтоженіемъ aa и $-aa$; въ остаткѣ получаю $-ab$, которой съ остальною частию $-bb$ дѣлимаго, дашъ $-ab - bb$ то, что слѣдуетъ еще дѣлить.

Продолжаю дѣленіе, взявъ $-ab$ за первой членъ новаго дѣлимаго.

Дѣлю $-ab$ на a , и пишу въ частномъ $-$, потому что дѣлимое съ дѣлителемъ имѣющъ противные знаки: чтожъ касается до буквы, то она должна быть b , которую пишу подъ первого частнаго.

Умножаю оба члена a и b дѣлителя на членъ $-b$ частнаго, въ произведеніи выходинъ $-ab - bb$; перемѣнивъ знаки, пишу $+ab + bb$ подъ остальнымъ новымъ дѣлимымъ. Дѣлаю приведеіе уничто-

Примѣры Умноженія.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{5}a^2b + \frac{1}{2}b^3 \\ \frac{5}{3}ab - 2b^2 \\ \hline \frac{2}{5}a^4b - \frac{12}{25}a^3b^2 + \frac{3}{10}ab^4 \\ - \frac{4}{3}a^3b^2 + \frac{9}{5}a^2b^3 - b^5 \end{array}$$

$$\frac{2}{5}a^4b - \frac{12}{25}a^3b^2 + \frac{3}{10}ab^4 - b^5$$

$$\begin{array}{r} 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \hline 20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\ + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \end{array}$$

$$20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5$$

Примѣры Дѣленія.

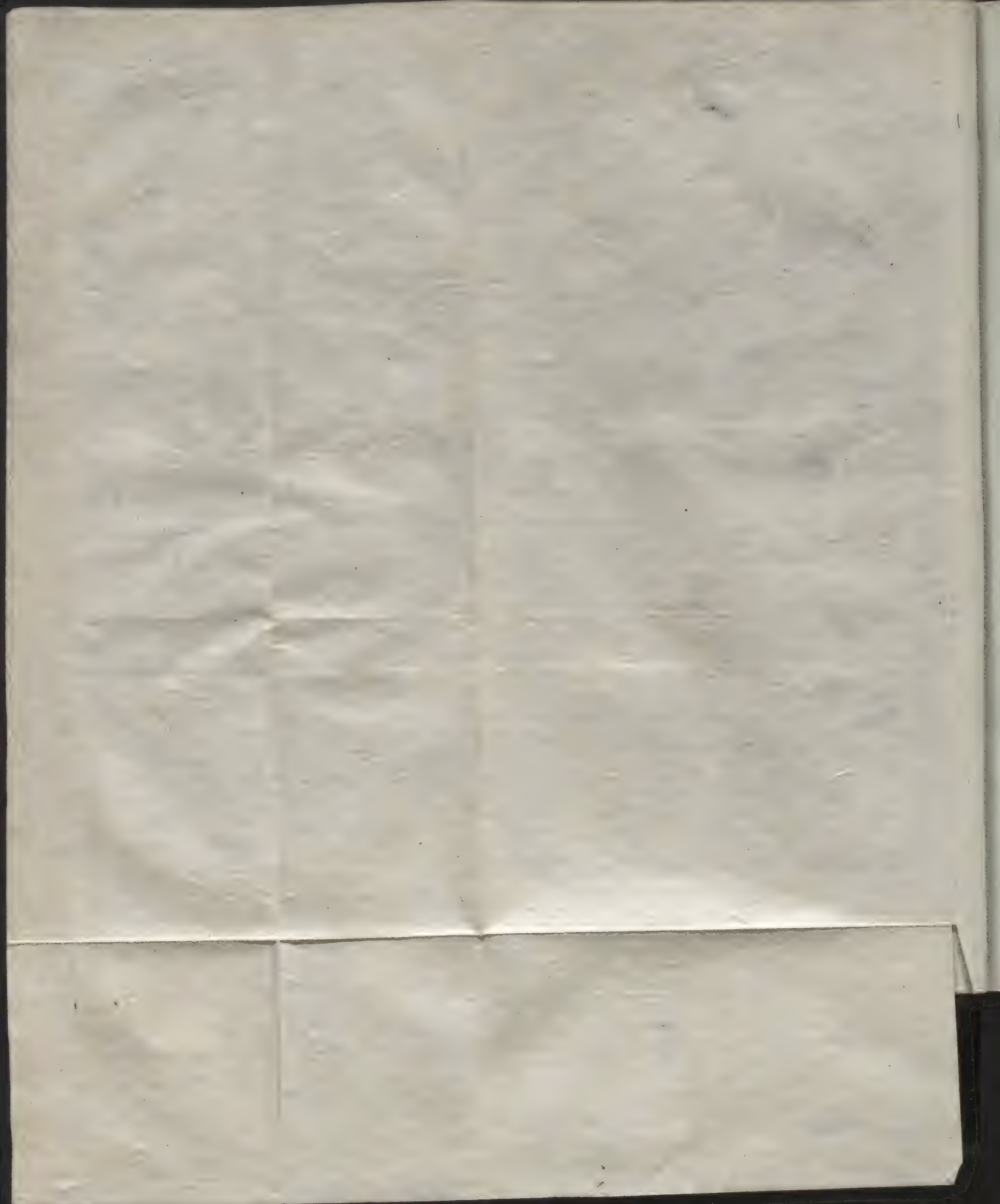
$$\begin{array}{r} a^3 - b^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \end{array} \right. \\ - a^3 + a^2b \\ \hline + a^2b - b^3 \\ - a^2b + ab^2 \\ \hline + ab^2 - b^3 \\ - ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 + 5ab + b^2 \\ 2a^2 - 3ab \end{array} \right. \\ - 8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 \\ \hline - 12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 \\ + 12a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^4 + 2aabb + b^4 - c^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} aa + bb + cc \\ aa + bb - cc \end{array} \right. \\ - a^4 - aabb - aacc \\ \hline + aabb - aacc + b^4 - c^4 \\ - aabb - b^4 - bbcc \\ \hline - aacc - bbcc - c^4 \\ + aacc + bbcc + c^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 + \frac{2}{7}a^2b - \frac{13}{20}b^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}a^2 - \frac{7}{5}b^2 \\ \frac{2}{7}a + \frac{1}{4}b \end{array} \right. \\ - \frac{2}{7}a^3 + \frac{9}{35}ab^2 \\ \hline \frac{2}{7}ab - \frac{3}{20}b^3 \\ - \frac{2}{7}ab + \frac{3}{20}b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 \\ - 20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12a^2b^3 \\ \hline - 25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 \\ + 25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 \\ \hline + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\ - 10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 \\ \hline 0 \end{array}$$



женіемъ одинакихъ частей и произвизныхъ знаковъ: а какъ въ останкѣ не выходитъ ничего, то заключаю, что частіиное есть въ шчотиоси $a - b$.

Можно равномѣрно расположить дѣлимое съ дѣлителемъ по буквѣ b : то въ шикомъ случаѣ надеежадобн дѣлать — $bb + aa$ на $b + a$, и посинуая такимъ же порядкомъ, какъ выше, нашла бы въ частномъ — $b + a$ количество равное $a - b$.

Смощри примѣры приложенной здѣсь таблицы.

37. Частно-олучается, что количество, выходящее послѣ многихъ разныхъ дѣйствій, можно поставитъ въ видѣ произведенія или результата, выходящаго изъ умноженія. Когдажъ сіе случается, то весьма часто нужбе представлять шакіе результаты показаніемъ умноженія между его производителями. Хотя общій способъ для открытія сихъ производителей зависитъ отъ познаній, шоторыя сообщимъ послѣ; однакожъ познакомившись нѣсколько съ умноженіемъ и дѣленіемъ, можно и безъ шѣхъ свѣдѣній примѣнитъ ихъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

На примѣръ, естли бы дано было сложить $gab - zbc + a^2$ съ $gab + zbc - 2a^2$, то вышло бы въ суммѣ $gab - a^2$, количество, шоторое по причинѣ общаго фактора a въ обихъ членахъ gab и a^2 можно почитать за произшедшее изъ умноженія $gb - a$ на a , и шоторое можно предшавитъ шакже въ видѣ $(gb - a) \times a$. Весьма нужно упражняшь въ шикомъ родѣ раздробленій количество на частіи,

*О способѣ находить общаго большаго
Дѣлителя двухъ буквальныхъ Ко-
личествъ.*

38. Способъ находить общаго большаго дѣлителя для двухъ алгебральныхъ количествъ почти сходствуетъ съ показаннымъ въ Арифметикѣ для чиселъ. Надлежитъ, по расположеніи двухъ количествъ по какой нибудь одной буквѣ, дѣлить то, въ которомъ находится сія буква съ самымъ большимъ показателемъ на другое, и продолжая дѣленіе до тѣхъ поръ, пока самой большой показатель сдѣлается меньше, нежели какой находится во второмъ, или по крайней мѣрѣ ему равенъ. Потомъ дѣлить второе количество на остатокъ перваго дѣленія съ такимъ же наблюденіемъ. Второй сей остатокъ дѣлить на первый, и продолжая дѣлить новой остатокъ на предыдущей до тѣхъ поръ, пока дѣленіе сдѣлается въ точности; послѣдній дѣлитель будетъ общій самой большой дѣлитель.

Прежде нежели покажемъ правило сіе на самомъ дѣлѣ, сдѣлаемъ замѣчаніе, которое можетъ облегчить его употребленіе; замѣчаніе сіе состоитъ въ томъ, что общій дѣлитель двухъ количествъ опредѣленъ не перемѣняется, когда одно изъ нихъ помножится

или раздѣлится на какое нибудь количество, не имѣющее общаго дѣлителя съ другимъ. На прим. ab и ac имѣютъ общимъ дѣлителемъ a , когдажъ ab умножу на d , то выйдетъ изъ него abd , количество не имѣющее съ ac общаго другаго дѣлителя, кромѣ a , то есть, кромѣ того же, какой былъ между ab и ac . Но сего не можешь вышши, когда умножу ab на количество, которое будетъ дѣлителемъ ac , или на количество имѣющее съ ac общаго произвидителя; на пр. естли умножу ab на c , то выйдетъ abc , котораго общій дѣлитель съ ac есть тоже ac . Равнымъ образомъ умноживъ ab на cd , количество, имѣющее общаго произвидителя съ ac , получу $abcd$, коего общій дѣлитель съ ac есть также ac .

39. Заключимъ изъ сего 1.^е Ежели при изысканіи общаго большаго дѣлителя двухъ количествъ случится, чю въ продолженіи дѣленія найдется въ дѣлимомъ или дѣлителѣ такой произвидитель или дѣлитель, которой не служивъ произвидителемъ другаго, въ такомъ случаѣ можно сократить сего произвидителя.

2.^е Можно умножать одно изъ двухъ количествъ на какое угодно число, лишь бы число сіе не было дѣлителемъ другаго, и не имѣло съ нимъ общаго произвидителя.

Здѣлаемъ теперь припоровку предписаннымъ правиламъ и замѣчаніямъ.

Положимъ, что требуется сыскать общаго большаго дѣлителя для $aa - 3ab + 2bb$ и $aa - ab - 2bb$.

П Р И М Ъ Р Ъ I.

1 с. Дѣлимое	}	1 й. Дѣлитель
$aa - 3ab + 2bb$ $- aa + ab + 2bb$		$aa - ab - 2bb$ $1 - - - - -$
1 й. Остатокъ $= 2ab + 4bb$		1 с. Частное

И такъ слѣдуетъ дѣлить $aa - ab - 2bb$ на $- 2ab + 4bb$; но какъ сіе послѣднее количественно имѣетъ произвожденіемъ $2b$, которое не служитъ общимъ произвожденіемъ во всѣхъ членахъ перваго, то стоимъ только раздѣлить $aa - ab - 2bb$ на $- a + 2b$, которое выходя въ уничтоженіи произвождителя $2b$. Слѣд.

2 с. Дѣлимое	}	2 й. Дѣлитель
$aa - ab - 2bb$ $- aa + 2ab$ $+ ab - 2bb$ $- ab + 2bb$		$- a + 2b$ $- a + b - - -$
Остатокъ $- - - - - 0$		2 с. Частное

И такъ общій дѣлитель есть $- a + 2b$.

П Р И М Ъ Р Ъ II.

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7a^2 - 23ab + 6b^2 \end{array} \right.$$

Но какъ не можно дѣлить 5 на 7, и при томъ 7 не служитъ общимъ произвожденіемъ во всѣхъ членахъ втораго количествна, то умножаю первое на 7, и получаю . . .

$$\begin{array}{r}
 \text{1 е. Дѣлимое} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1 й. Дѣлитель} \\ 35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 \\ - 35a^3 + 115a^2b - 3ab^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} 7a^2 - 3ab + 6b^2 \\ \hline 5a \text{ --- 1 е. Частное} \end{array} \\
 \text{1 й. Остатокъ} \quad - 11a^2b + 47ab^2 - 42b^3
 \end{array}$$

Могу еще дѣлитель остатокъ сей на того же дѣлителя, умноживъ его на 7, и спустивъ производящаго b , то есть :

$$\begin{array}{r}
 \text{2 е. Дѣлимое} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{2 й. Дѣлитель} \\ - 77a^2 + 3 \cdot 9ab - 29b^2 \\ + 77a^2 - 25ab + 6b^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} 7a - 23ab + 6b^2 \\ \hline - 11 \text{ --- 2 е. Частное} \end{array} \\
 \text{2 й. Остатокъ} \quad - 76ab - 24b^2
 \end{array}$$

Теперь должно дѣлитель $7a - 23ab + 6b^2$ на $76ab - 24b^2$, или лучше на $a - 3b$, по уничтоженіи фактора $76b$. Слѣд.

$$\begin{array}{r}
 \text{3 е. Дѣлимое} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{3 й. Дѣлитель} \\ 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ - 7a^2 + 21ab \\ \hline - ab + 6b^2 \\ + 2ab - 6b^2 \\ \hline \text{Остатокъ} \quad = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} a - 3b \\ \hline 7a - 21b \text{ --- 3 е. Частное} \end{array}
 \end{array}$$

И такъ общій дѣлитель двухъ данныхъ коллочеснѣ будетъ $a - 3b$.

О буквальныѣхъ Дробяѣхъ.

40. Дроби въ букваѣхъ исчисляются по тѣмъ же правиламъ, по какимъ дроби въ числаѣхъ, съ присовокупленіемъ къ нимъ правилъ, преподанныхъ выше для сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

41. Дробь $\frac{a}{b}$ можетъ превратиться безъ перемѣны величины своей въ $\frac{ac}{bc}$, или $\frac{aa}{ab}$, или $\frac{aa+ab}{ab+bb}$, и такъ далѣе.

Ибо сіи послѣднія дроби тоже значащъ, что и первая, коюрой оба члена помножены на c въ первомъ случаѣ, на a во второмъ и на $a+b$ въ третьемъ, что одинаково не перемѣняетъ величины.

42. Дробь $\frac{aac}{abc}$ есть одинакова съ $\frac{a}{b}$; дробь $\frac{6a^3+a^2b}{1-a^3+9a^2c}$ равна $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Въ истиннѣ сего увѣриться можно раздѣленіемъ обоихъ членовъ первой на ac , а третьей на $3a^2$. Впрочемъ приведеніе дробей въ простѣйшее ихъ значеніе явствуетъ также изъ сказаннаго (33).

Общее правило для сокращенія или представленія дроби въ малѣйшихъ числахъ состоитъ въ томъ, чтобы дѣлить оба ея члена на общаго большаго дѣлителя.

43. Для приведенія количества, состоящаго изъ цѣлаго и дроби, въ одну дробь, надлежитъ, какъ было показано въ Арифметикѣ, умноживъ цѣлое на знаменателя дроби, при немъ находящейся.

На пр. $a + \frac{bd}{c}$ можетъ перемѣниться въ $\frac{ac+bd}{c}$.

Равнымъ образомъ $a + \frac{cd-ab}{b-a}$ превратится въ $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-a}$ чрезъ помноженіе цѣлаго a на знаменателя $b-a$, а по сокращеніи въ $\frac{-ad+cd}{b-a}$, или $\frac{cd-ad}{b-a}$.

44. Выключка цѣлыхъ, содержащихся въ липптеральной дроби, дѣлается также, какъ въ Ариеметикѣ; надлежитъ раздѣлить числителя на знаменателя, послѣдуя предписаннымъ для дѣленія правиламъ.

Почему количествъ $\frac{ab+ac+cd}{a}$ можетъ приведемо быть въ $3b+c+\frac{cd}{a}$; равнымъ образомъ количество $\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$ превращается въ $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$ чрезъ раздѣленіе на $a+2b$.

45. Для приведенія многихъ буквальныхъ дробей къ одинакому знаменателю правило служило тоже, какъ въ Ариеметикѣ.

И такъ, чтобъ привести слѣдующія три дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ къ одинакому знаменателю, множу оба члена первой на df , оба члена второй на bf , и оба члена третьей на bd ; отъ чего три дроби, приведенныя къ одинакому знаменателю, сдѣлаются $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Часть III. В

Равнымъ образомъ поступать должно, когда числители или знаменатели дробей, или и тѣ и другія будутъ разнородныя количества, наблюдая однакожъ правила, предписанныя для умноженія разнородныхъ чиселъ.

На примѣръ двѣ дроби $\frac{b+c}{a+b}$ и $\frac{a-2c}{a-b}$, приведенныя къ одному знаменателю, превращаясь въ $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ и $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ чрезъ умноженіе обоихъ членовъ первой на $a-b$, а второй на $a+b$.

46. Что принадлежитъ до сложения и вычитанія дробей, то по приведеніи ихъ къ одному знаменателю, стоитъ только послѣ сложить или вычесть числители ихъ, и подѣ суммою или остаткомъ подписать общаго знаменателя.

Еслили двѣ дроби $\frac{b+c}{a+b}$ и $\frac{a-2c}{a-b}$, приведенныя къ одинакому знаменателю $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ и $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, потребуемъ сложить, то сумма ихъ будетъ $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ или $\frac{2ab-ac-bb-2bc+aa}{aa-bb}$. Когдажъ потребуется вторую вычесть изъ первой, то разность или остатокъ выйдетъ $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, которой можно переменить въ $\frac{2ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

47. Замѣтимъ, что при вычитаніи второй дроби изъ первой, одни только знаки числителя оной перемѣняются: но еслибы перемѣнены были знаки какъ у числителя, такъ и знаменателя, то сама дробь чрезъ то не перемѣнилась бы, и слѣд. вмѣсто вычитанія здѣлано было бы дѣленіе; ибо $\frac{a}{b}$ есть то же, что $\frac{-a}{-b}$ по правилу (36).

48. Для умноженія $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ напиши $\frac{ac}{bd}$, умноживъ числителя на числителя и знаменателя на знаменателя, какъ въ Арифметикѣ. Равнымъ образомъ изъ $a \times \frac{1}{2}b$, выходитъ $\frac{1}{2}ab$.

49. Для дѣленія $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ дѣйствіе производится множеніемъ $\frac{a}{b}$ на $\frac{d}{c}$, отъ чего въ частномъ выходитъ $\frac{ad}{bc}$; а чтобъ раздѣлить $\frac{a+b}{c+d}$ на $\frac{c+d}{a-b}$, умножь $\frac{a+b}{c+d}$ на $\frac{a-b}{c+d}$; отъ чего произойдетъ $\frac{(a+b)}{(c+d)} \times \frac{(a-b)}{(c+d)}$ или $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$, или по совершеніи умноженія, представленнаго въ числитель $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

О Упрощеніяхъ или Эквацияхъ.

50. Когда два количества равны, то они раздѣляются между собою симъ знакомъ $=$, которой произносится словами равно

или *равняется*; на примѣрѣ такое изображеніе $a = b$ произносится a равно b , или a равняется b .

Совокупность двухъ или многихъ количествъ, раздѣленныхъ между собою знакомъ $=$, называется *уравненіемъ*, или *экваціею*. Всѣ количества, находящіяся съ лѣвой стороны знака $=$, составляютъ *первую часть* уравненія; а тѣ, которыя находятся вправо *вторую часть*. Въ уравненіи $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ есть первая часть, а $2x + 7$ вторая. Уравненія находятся въ великомъ употребленіи при рѣшеніи вопросовъ, предлагаемыхъ о количествахъ.

Всякой вопросъ, разрѣшаемой Алгеброю, заключающъ въ содержаніи своемъ явно или скрыто нѣкоторое число условій, посредствомъ которыхъ разсуждается объ отношеніяхъ неизвѣстныхъ количествъ съ извѣстными, отъ коихъ первыя зависятъ. Отношенія сіи могутъ, какъ мы то увидимъ со временемъ, представлены быть всегда уравненіями, въ которыхъ какъ неизвѣстныя, такъ и извѣстныя количества совокупляющія между собою болѣе или мѣнѣе, глядя по трудности или легкости вопроса.

И такъ при ірѣшеніи Алгебраическихъ вопросовъ , надлежитъ наблюдать , при вещи.

1.^е Выразумѣть изъ содержанія или свойства вопроса , какія находящіяся отношенія между извѣстными и неизвѣстными количествами. Способность сія пріобрѣтается , какъ и многія другія , чрезъ частое упражненіе , но нѣтъ особенныхъ для сего правилъ.

2.^е Умѣть изображать каждое изъ отношеній уравненіемъ. Условіе сіе можетъ подлежать одному правилу , о которомъ предложимъ послѣ ; но приноровка сего правила легче или труднѣе бываетъ глядя по свойству вопросовъ , по понятію и упражненію разрѣшающаго.

3.^е Рѣшивъ уравненіе или уравненія , то есть , выводивъ изъ нихъ величину неизвѣстныхъ количествъ. Сей послѣдній пунктъ подлежитъ не опредѣленному числу правилъ , и съ него именно начнемъ.

Какъ разрѣшаемые вопросы могутъ представлены быти въ уравненіяхъ сложныхъ или не такъ сложныхъ , то уравненія сіи раздѣляются на многіе классы или степени , которые различаются по показателю количе-

ства или количествъ неизвѣстныхъ: мы покажемъ сложнѣйшія со временемъ, а теперь займемся *уравненіями первой степени*. Симъ именемъ называюся такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстныя количества не бываютъ умножены ни на самихъ себя, ни между собою.

!
**Объ Уравненіяхъ первой степени съ
однимъ неизвѣстнымъ.**

51. Рѣшить уравненіе значитъ приводить его въ другое, въ которомъ бы неизвѣстное количество, или буква его представляющая, находилось особо въ одной части, а въ другой все бы были одни извѣстные.

Правиль для рѣшенія уравненій первой степени, то есть, для приведенія ихъ въ такое состояніе, чтобъ неизвѣстное стояло особо въ одной части, находится числомъ три, которыя относяся къ тремъ различнымъ видамъ, смотря по тому, какъ неизвѣстное можеть перемѣшиваться или сопрягаться съ извѣстными количествами.

Неизвѣстныя количества представляются нѣкоторыми послѣдними Лашинской Азбуки буквами *х, у, з*; а извѣстныя или числами, или первыми буквами.

52. Незвѣстное совокупляется съ извѣстными количествами проякимъ образомъ : 1.^е Чрезъ сложеніе или вычитаніе, какъ въ уравненіи $x + 3 = 5 - x$. 2.^е Чрезъ сложеніе, вычитаніе и умноженіе, какъ въ уравненіи $4x - 6 = 2x + 16$. 3.^е Наконецъ чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, какъ въ уравненіи $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$, или чрезъ два послѣднія дѣйствія, или чрезъ послѣднее только одно.

Вопи и правила для извлеченія неизвѣстнаго количества, или, такъ сказать, оплущенія его отъ извѣстныхъ во всѣхъ сихъ разныхъ случаяхъ.

53. Для переставки какого нибудь члена изъ одной части уравненія въ другую, надлежитъ змарать или уничтожить его въ той, гдѣ онъ прежде былъ, и написать въ другой съ противнымъ знакомъ. При чемъ должно помнить, что членъ, не имѣющій знака, почитается всегда за членъ съ знакомъ $+$.

На примѣръ въ уравненіи $4x + 3 = 3x + 12$, желая перенести членъ $+3$ въ другую часть экваціи, пишу $4x = 3x + 12 - 3$, гдѣ явствуетъ, что членъ 3 не находясь уже въ первой части, но во второй съ знакомъ $-$, противнымъ прежнему $+$.

По приведеніи членовъ сего уравненія, превращается оно въ $4x = 3x + 9$; желая же теперь пере-

нести членъ $3x$ въ первую часть, пишу $4x - 3x = 9$, а по приведеніи $x = 9$,

Равнобѣрно когда захочу въ экваціи $5x - 7 = 21 - 4x$ перенести членъ -7 во вторую часть; то напишу $5x - 21 = 4x + 7$, что превращается въ $5x = 28 - 4x$; наослѣдокъ желая перенести $-4x$, напишу $5x + 4x = 28$, или по приведеніи $9x = 28$. Мы увидимъ ско,о, какъ кончится рѣшеніе такого уравненія.

Причину сего правила можно легко понять; поелику количества, составляющія первую часть экваціи, всѣ вмѣстѣ равны количествамъ второй части; то явствуетъ, что равенство ихъ не можетъ перемѣниться отъ того, когда прибавивъ въ одной части или убавивъ у нее какой нибудь членъ, прибавишь или убавишь равно тотъ же членъ въ другой: но при уничтоженіи члена съ знакомъ $+$, дѣлается самымъ дѣломъ уменьшеніе симъ членомъ въ той части, гдѣ онъ находился; слѣд. надлежитъ уменьшить и другую часть равнымъ количествомъ, то есть, написать въ ней тотъ же членъ съ знакомъ $-$. Напроставъ по уничтоженіи члена съ знакомъ $-$, выходящъ на самомъ дѣлѣ прибавка въ той части, гдѣ онъ находился; слѣд. надобно также прибавить и къ другой части равное количество, то есть, написать въ ней тотъ же членъ съ знакомъ $+$.

54. Изъ сего правила явствуетъ, что можно вдругъ переносить всѣ члены съ не-

извѣстнымъ количествомъ въ одну часть, и всѣ извѣстныя въ другую.

На примѣръ изъ экваціи $7x - 8 = 14 - 4x$, можно вдругъ вывести $7x + 4x = 14 + 8$, или $11x = 22$. Равнобѣрно эквація $ax + bc = cx = ac - bx$ превращается въ $ax - cx + bx = ac - bc$.

55. При перестановкѣ членовъ можетъ случиться, что оставшіеся x послѣ приведенія найдутся съ знакомъ $-$; на пр. въ экваціи $3x - 8 = 4x - 12$ по перенесеніи всѣхъ x въ первую часть, выйдетъ $3x - 4x = -12 + 8$, а по приведеніи $-x = -4$; въ такомъ случаѣ стоитъ только перемѣнить знаки въ обѣихъ частяхъ, по чему въ настоящемъ примѣрѣ сдѣлается $+x = +4$ или $x = 4$. Ибо я могъ бы прежде перенести x во вторую часть, и сдѣлать $-8 + 12 = 4x - 3x$, или $4 = x$; но это все равно, что $x = 4$.

56. Когда по перенесеніи всѣхъ неизвѣстныхъ членовъ въ одну часть и всѣхъ извѣстныхъ въ другую, не случится въ уравненіи дробей, тогда для сысканія величины неизвѣстнаго, надлежитъ сдѣлать слѣдующее правило: оставь неизвѣстное одно въ своей части, и сдѣлай множителя его дѣлителя въ другой части извѣстныхъ количествъ.

На примѣрѣ въ экваціи $7x - 8 = 14 - 4x$, которую разбирали выше, нашли по переноскѣ и приведеніи членовъ въ $11x = 22$; слѣд. чтобъ узнать величину x , должно написать $x = \frac{22}{11}$, что превра-

тится въ $x = 2$; по сему, должно написать x одно въ своей частии, а множителя его 11 здѣлавъ дѣлительнымъ 22 во второй. Ибо когда вмѣсто $11x$ напишу только x , въ такомъ случаѣ беру только с одинадцатую часть изъ первой части экваціи; слѣд. для сохраненія равенства долженъ также написать о ну одиннадцатую часть и во второй части уравненія, по сему, раздѣливъ вторую его часть на 11.

Равнымъ образомъ въ данной экваціи $12x - 15 = 4x + 25$, по переноскѣ членовъ найдется $12x - 4x = 25 + 15$, или по приведеніи $8x = 40$; по сему чтобъ сыскать величину x , напишу $x = \frac{40}{8}$, отъ чего выдѣлѣтъ $x = 5$.

Еслили извѣстные количества, умножающія x , будутъ вмѣсто чиселъ представлены буквами, то правило и сущѣ сущѣ то же.

На примѣрѣ въ экваціи $ax = bc$ для сысканія величины x , надобно написать $x = \frac{bc}{a}$.

Когда по переноскѣ найдется много членовъ съ неизвѣстнымъ, то правило и для сего остается то же.

На примѣрѣ желая узнать величину x въ экваціи $ax + bc = cx = ac - bx$, которую разбирали выше, и которую по переноскѣ членовъ переименовали въ $ax - cx + bx = ac - bc$, должно напи-

часть $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$, то есть, написать одинъ x въ своей части, и прибавить количество $a - c + b$, умноживъ x , дѣлителемъ другой части; послѣду $ax - cx + bx$ происходишь изъ умноженія x на $a - c + b$.

Равномѣрно изъ экваціи $ax = bc - 2x$ по перенесеніи выходишь $ax + 2x = bc$, и слѣд. по предписанному правилу дѣленія будетъ $x = \frac{bc}{a + 2}$. Уравненіе $x - ab = bc - ax$ по перенесеніи членовъ обрашается въ $x + ax = bc + ab$, и слѣд. чрезъ раздѣленіе въ $x = \frac{bc + ab}{1 + a}$; ибо не должно забыть, что множитель перваго x въ части $x + ax$ есть 1, потому что $x + ax$ происходишь изъ умноженія x на $1 + a$.

57. Для превращенія экваціи съ знаменателями въ другую, въ которой бы ихъ не находилось, *надлежитъ умножить каждой членъ, не имѣющій знаменателя, на произведеніе всѣхъ знаменателей; потомъ умножить также числителя каждой дроби на произведеніе знаменателей прочихъ дробей.*

На примѣръ въ данной экваціи $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, умножу числителя $2x$ дроби $\frac{2x}{3}$ на 35, произведеніе двухъ знаменателей 5 и 7, отъ чего произойдетъ $70x$; умножу членъ 4, не имѣющій знаменателя, на 105 произведеніе всѣхъ прехъ знаменателей 3, 5 и 7, отъ чего выдѣлю 420; умножу числителя $4x$ дроби $\frac{4x}{5}$ на 21, произведеніе двухъ

знаменателей 3 и 7, и получу $84x$; умножу членъ 12, не имѣющій знаменателя, на 105 произведе-
всѣхъ шрехъ знаменателей 3, 5 и 7, и получу 1260;
наконедъ умножу числителя 5х дроби $\frac{5x}{7}$ на 15, про-
изведеіе двухъ ипотихъ знаменателей 3 и 5, и по-
лучу 75х. Такимъ образомъ предложенная эквація
перемѣнилась въ слѣдующую $7x + 420 = 84x + 1260$
— $75x$, въ кшорой, чинобъ опредѣлишь х, снѣмъ
только здѣлашь два предыдущія правила. По пер-
вому правилу (53) сія эквація перемѣнилась къ $7x$
— $84x + 75x = 1260 - 420$, а по второму (54) въ
 $x = \frac{840}{61}$; наконецъ по совершеіи дѣленія выдеітъ
 $x = 13\frac{47}{61}$.

Въ истиннѣ правила сего можно легко
увѣриться, припомнивъ сказанное въ Ариоме-
тикѣ о приведеніи многихъ дробей къ оди-
накому знаменателю.

Ибо въ данной экваціи $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} +$
 $12 - \frac{5x}{7}$ для приведенія шрехъ дробей $\frac{2x}{3}$,
 $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$ къ одному знаменателю, надлежитъ
умножить числителей ихъ на тѣ же числа,
на какія и настоящее правило предписываетъ
множить, и дать новымъ симъ числителямъ
общимъ знаменателемъ произведеіе всѣхъ
знаменателей; отъ чего предыдущая эквація
превратится въ такую другую $\frac{70x}{105} + 4 =$
 $\frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, которая въ сущности

оспаются таже, потому что новыя дробы равны прежнимъ. Но когда захочемъ привести также и цѣлыя въ дробь, то должно умножить сіи цѣлыя на знаменателя дроби. при нихъ находящейся, какъ здѣсь на 105, состоящаго изъ произведенія всѣхъ знаменателей, заключающихся въ уравненіи; послѣ чего выдетъ $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$; но безъ сумируія равенство сіе не уничтожится и по уничтоженіи въ обѣихъ частяхъ экваціи общаго знаменателя; ибо когда два количества раздѣленные равны, то они должны быть равны и нераздѣленные; слѣд. эквація $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$ должна равняться предыдущей.

58. Еслии разные члены, составляющіе эквацію, будутъ всѣ литеральныя количества, то и тутъ правило оспается тоже; только надобно прибавить къ сему то, что предписано для умноженія литеральныхъ количествъ.

На примѣрѣ въ экваціи $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$, множу числителя ax на произведеніе dc двухъ прочихъ знаменателей, и получаю $acd x$; множу членъ $+b$ на произведеніе bdc всѣхъ знаменателей, и нахожу $+b^2dc$; множу cx на bc и нахожу bc^2x ; наконецъ множу ab на bd , и получаю ab^2d , опъ чего эквація перемѣнилась въ $acd x + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, а сія по переставкѣ членовъ въ $acd x - bc^2x = ab^2d -$

b^2cd , и на послѣдокъ чрезъ раздѣленіе (56) въ $x = \frac{a^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

59. Если знаменатели будущъ разнородныя количества, то можно для легкости представлять напередъ дѣйствія показаніемъ, потомъ производить ихъ.

На примѣръ въ данномъ уравненіи $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$ прежде напишу $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b) = cx \times (a-b)$; послѣ чего совершивъ показаніе, кимъ образомъ дѣйствія, получу $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$, по перенесеніи $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; наконецъ по раздѣленіи (56) $x = \frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Примѣры на предыдущія Правила, состоящіе изъ нѣкоторыхъ простыхъ Вопросовъ.

60. Изъясненныя правила довольно достаточны къ рѣшенію всякаго вопроса, представленнаго уравненіемъ первой степени. Для представленія же вопроса уравненіемъ, надобно употреблять слѣдующее правило: *Изобрази искомое количество или количества каждое особенною буквою, и разсмотрѣвъ со вниманіемъ содержаніе вопроса, произведи посредствомъ Алгебраическихъ знаковъ надъ тѣми количествами и количествами извѣстными та-*

кія же дѣйствія и разсужденія, какія бы ты произвелъ, знаяши величины не извѣстныхъ для повѣрки ихъ.

Хотя сіе правило есть общее, и можетъ руководствоваться къ представленію всѣхъ вопросовъ уравненіями; однакожъ не бесполезно приоровку его показати на самомъ дѣлѣ.

Вопросъ первой. Изъ двухъ мортиръ пущено 100 бомбъ: изъ первой до больше другой; спрашивается, сколько изъ каждой пущено?

Съ малѣйшимъ вниманіемъ можно примѣшати, что вопросъ сей переименуется въ слѣдующій: состави два количества, коихъ бы вмѣстѣ составляли 100, и изъ коихъ одно превосходило бы другое числомъ 40. Но явствуетъ, что какъ скоро будетъ извѣстно одно количество, то будетъ извѣстно и другое; ибо если бы я зналъ, на примѣръ большее, то сполна бы шло для опредѣленія меньшаго вычсѣ изъ него 40.

И такъ представлю большое количество чрезъ x .

Узнавши величину x , для повѣрки нахожу меньшее вычитая изъ него 40; по томъ складываю большее съ меньшимъ, и смотрю, составляющіи ли они вмѣстѣ 100. Сниземъ, подражая сему, производимъ на самомъ дѣлѣ.

$$\begin{array}{rcl} \text{Большее число} & - & - & - & - & x \\ \text{Меньшее} & - & - & - & - & x - 40 \\ \hline \text{Сумма ихъ} & - & - & - & - & 2x - 40 \end{array}$$

Но по условію вопроса,
сумма сія должна составлять - - - - 100
Слѣд. $2x - 40 = 100$

Чтобъ опредѣлить величину x въ семъ уравненіи, сличимъ только употребивъ тѣмныя правила (53 и 56). По первому выдѣмъ $2x = 100 + 40$ или $2x = 140$, а по второму $x = \frac{140}{2} = 70$; сыскавши большое x , вычту изъ него 40, и получу 30 за меньшее. Почему искомыя два числа будутъ 70 и 30.

Разсматривая способъ, по которому поступали мы при рѣшеніи сего вопроса, ясно можно видѣть, что употребленные нами разсужденія ни мало не зависящъ отъ особенныхъ величинъ чиселъ 100 и 40, находящихся въ вопросѣ, и что, двоякопроизводство останется одинаково, хошя бы въ мѣсто сихъ чиселъ даны были совсѣмъ другія. На примѣлъ есплибъ вопросъ былъ данъ вообще такимъ образомъ: Сыскать два числа, коихъ сумма и разность извѣстны; сумма представлена чрезъ a , а разность чрезъ b , то —

$$\begin{array}{lcl} \text{Положимъ большое} & = & x \\ \text{Слѣд. меньшее будетъ} & = & x - b \\ \text{Сумма ихъ} & = & 2x - b \end{array}$$

Но по вопросу сумма сія должна составлять a ; слѣд. $2x - b = a$.

По переставкѣ $2x = a + b$, и по раздѣленіи $x = \frac{a+b}{2}$, или $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

То есть, для сысканія большаго числа надлежитъ взятьъ половину a , и сложить ее съ половиною b ; это научаетъ, что по извѣстной суммѣ a двухъ чиселъ и разности ихъ b , большое найдетсѣя чрезъ сложеніе полсуммы съ полразностию.

Поелику меньшее число представляетъ $x - b$, то оно должно быть равно $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, или по приведеніи всего въ дробь $\frac{a+b-2b}{2}$, то есть, $\frac{a-b}{2}$ или $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; слѣд. для сысканія меньшаго должно

изъ половины *a* вычешь половину *b*, то есть, изъ полсуммы вычешь полразность.

Отсюда явствуетъ, какимъ образомъ, представляя извѣстные количества данныхъ вопросовъ буквами, находимъ общія правила для рѣшенія всѣхъ другихъ вопросовъ одинаковаго свойства.

Часто случается, что вопросы, при первомъ на нихъ взглядѣ, кажутся различными; но по разсмотрѣннн примѣчаемъ, что они различествуютъ между собою въ одномъ только оборотѣ выраженія. На примѣръ возьмемъ въ разсужденіе сей вопросъ.

Раздѣлить извѣстное число и представленное чрезъ *a* на двѣ части, изъ коихъ бы одна была меньше или больше другой извѣстнымъ количествомъ, представленнымъ чрезъ *b*. Легко примѣнимъ можно, что сей вопросъ одного свойства съ предыдущимъ.

Вопросъ второй. Надобно раздѣлить 720 канонеровъ на три отряда такъ чтобъ въ первомъ было 80, а во второмъ 40 челоѣкъ больше послѣдняго; спрашивается, изъ какого числа каждой отрядъ долженъ состоять?

Въѣхавъ мнѣ извѣстно было число послѣдняго отряда, то я повѣрилъ бы такъ: придалъ бы къ нему сперва 40, и нашелъ бы число второго; потомъ 80, и нашелъ бы число перваго отряда; наконецъ всѣ три числа сн сложилъ бы вмѣстѣ, и получилъ бы за сумму ихъ 720.

И такъ представивъ число послѣдняго отряда чрезъ *x*, и разсуждая такимъ же образомъ на самомъ дѣлѣ, получимъ . . .

Число перваго или меньшаго отряда	— — —	<i>x</i>
слѣд. число средняго будетъ	— — —	<i>x</i> + 40
а большаго	— — —	<i>x</i> + 80
Сумма	— — —	3 <i>x</i> + 120

должна составлять по условію вопроса — — — 720

Слѣд. $3x + 120 = 720$.

Часть III. Г

По предписаннымъ правиламъ найдемся $3x = 720 - 120$, или $3x = 600$, и слѣд. $x = 200$; почему среднее число будетъ сослѣдуетъ изъ 240, а большее изъ 280; сумма сихъ трехъ чиселъ въ самой же и дастъ 720.

И здѣсь понять не трудно, что данной вопросъ можемъ решить такимъ же образомъ, хотя бы вмѣстѣ данныхъ чиселъ 720, 40 и 80 приняты были совсѣмъ другія. И такъ при рѣшеніи всѣхъ вопросовъ, которыми предлагаются раздѣлить известное число a на три части такія, изъ которыхъ бы большая превосходила меньшую известнымъ количествомъ b , а средняя еще меньшую количествомъ c , разсуждать будемъ такъ:

Представимъ меньшее чрезъ	- - -	x
Среднее	- - - - -	$x + c$
Большое	- - - - -	$x + b$
Сумма ихъ	- - - - -	$3x + b + c$

должна составлять - - - - - a

$$\text{Слѣд. } 3x + b + c = a$$

По переславкѣ $3x = a - b - c$, и по раздѣленіи

$$x = \frac{a - b - c}{3}.$$

То есть, для опредѣленія меньшаго количества надлежитъ вычесть изъ числа, которое предлагается раздѣлить, оба излишества, и изъ остатка взять третью; послѣ чего два прочія количества найдемъ безъ всякаго труда. И такъ для рѣшенія данного вопроса раздѣлимъ 642 на три части такія, изъ которыхъ средняя превосходитъ меньшую 75 мью, а большая меньшую 87 мью, слоуду два излишества 75 и 87, сумма ихъ будетъ 162; вычту 162 изъ 642, въ остаткѣ получу 480, коего треть 160 будетъ меньшая часть. Слѣд. двѣ прочія будутъ 160 + 75 или 235, и 160 + 87 или 247.

Вопросъ третій. Раздѣлить 14250 патроновъ на три дѣлашменна, которые содержатся между собою, какъ числа 3, 5 и 11, то есть, первой ко второму $\equiv 3:5$, и опять первой къ третьему $\equiv 3:11$?

Есѣлибѣ мнѣ извѣстно было число людей какого нибудь дѣлашменна, на примѣрѣ первого, то вошѣ какъ бы я повѣрилѣ.

Сыскалѣ бы по шройному правилу число, которое содержится къ сему первому $\equiv 5:3$, и оно показало бы мѣ числѣ втораго дѣлашменна; по шомѣ сыскалѣ бы другое число, которое содержится къ шому же первому $\equiv 11:3$, и оно предсказало бы людей шростаго дѣлашменна; сложивѣ вѣ три числа вмѣстѣ, получилѣ бы за шумму ихъ 14250. Начнемѣ поступать по сему разсужденію.

Положимѣ первое число x

Для опредѣленія втораго, шду чешвершой членѣ вѣ сей пропорціи $3:5 \equiv x:$

$$\text{онѣ будетѣ} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \frac{5x}{3}$$

Для опредѣленія шростаго, шду чешвершой членѣ вѣ пропорціи $3:11 \equiv x:$,

$$\text{которой будетѣ} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \frac{11x}{3}.$$

$$\text{Сумма сихъ чиселъ есть } x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}, \text{ или } x + \frac{16x}{3}.$$

Но по условію вопроса шумма сія должна составлять 14250; слѣд. $x + \frac{16x}{3} \equiv 14250$.

Для опредѣленія x уничтожаю (57) знаменатель 3, и получаю $3x + 16x \equiv 42750$, или $19x \equiv 42750$; слѣд. раздѣливѣ на 19 (56), буду имѣть $x \equiv \frac{42750}{19}$

— 2250. Почему вторая часть, изображенная чрезъ $\frac{5x}{3}$, будетъ $\frac{5 \times 2250}{3}$, или $\frac{11250}{3}$, или 3750; а третья, представленная чрезъ $\frac{11x}{3}$, будетъ $\frac{11 \times 2250}{3}$, или $\frac{24750}{3}$, или 8250; сумма сихъ частей составитъ дѣйствительно 14250, и при томъ содержаніе между числами 2250, 3750, 8250 находится такое же, каго между 3, 5 и 11; въ этомъ удостовѣряемся раздѣленіемъ трехъ первыхъ чиселъ на 750, ибо такое дѣленіе ни мало не переѣмнитъ содержанія.

И вообще, если даны для дѣленія число 14250 изобразится чрезъ a , а пропорциональныя части 3, 5, 11 чрезъ буквы m , n , p ; то при ршеніи должно поступать по предыдущему разсужденію.

Почему, предсавивъ первую часть чрезъ x , для полученія второй, найду четвертой членъ въ пропорціи $m : n = x :$

Сей четвертой членъ, или вторая часть будетъ $\frac{nx}{m}$.

А для опредѣленія третьей, сыщу четвертой членъ въ пропорціи $m : p = x :$

Сей четвертой членъ, или третья часть будетъ $\frac{px}{m}$.

Слѣд. сумма сихъ трехъ частей изобразится чрезъ $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, или $x + \frac{nx + px}{m}$; но сумма сія должна составлять нѣа; поему $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

По уничтоженіи знаменателя выхоиптъ $mx + nx + px = ma$, а по раздѣленіи $x = \frac{ma}{m + n + p}$. Сей результатъ заславляемъ насъ замѣтить, такъ Алгебра описываетъ общія правила въ исчисленіяхъ

Ибо явствуетъ изъ Арифметики, что при вычисленіи членъ рнато члена въ пропорціи, коей первыми членами будутъ $m + n + p : m = a$, сей четвертый членъ долженъ выйти $\frac{an}{m + n + p}$; а какъ нашли мы, что x изображаетъ однокое количество, то заключимъ, что для опредѣленія x надлежитъ сыскать четвертой членъ въ пропорціи, коей первымъ будетъ сумма пропорціональныхъ членовъ, вторымъ первая изъ ихъ частей, а третьимъ число, которое должно раздѣлить; но это точно сходствуетъ съ Арифметическимъ правиломъ для вѣрсовъ такого же свойства.

Вопросъ четвертой. Велѣно выступить Артиллерійскому отряду съ походомъ изъ Тулы въ Кіевъ съ предписаніемъ идти ему съ сумки по 16 верстъ; на другой день другому отряду изъ Москвы въ слѣдъ за первымъ, полагая 24 версты идти ему на день; спрашивается, на какой верстѣ послѣдній отрядъ догонитъ первый? Известно приметъ, что Тула находится отъ Москвы разстояніемъ во 182 верстахъ.

Еслили мнѣ сказано будетъ, на какой верстѣ второй отрядъ догонитъ первый, то спяну повѣрять такимъ образомъ. Спашу сначала, сколько долженъ пройти верстъ первой до соединенія съ нимъ второго; а какъ пути ихъ одного времени должны сдѣлаться пропорціонально скоростямъ, то съ, пропорціональному числу верстъ, предписанныхъ идти каждому на день, но опредѣлю число пройденныхъ верстъ первымъ чрезъ послѣдку 24 : 16, такъ пройденная дорога вторымъ къ дорогѣ первого. Сыскавши четвертой членъ въ сей пропорціи, сложу его съ 16, нимъ числомъ верстъ, которое прошелъ первый отрядъ за день впередъ, и со 182 разстояніемъ отъ Москвы до Тулы, которое также у него было впереди; сумма должна равняться числу верстъ, которое нужно пройти второму отряду до соединенія. Спашемъ послѣднее по сему разсужденію, положивъ x за число пройденныхъ верстъ вторымъ отрядомъ.

Еслили Московской опрядъ пройдетъ число верстъ x , то въ тоже время Тульской долженъ пройти - - - - - $\frac{16}{24}x$, или $\frac{2}{3}x$.

Впередъ за день - - - - - 16
Разстояние отъ Москвы до Тулы - - - - - 182

Но сумма шестъ послѣднихъ количествъ $\frac{2}{3}x + 198 \dots$ должна равняться нули втораго опрядъ до соединенія съ первымъ; слѣд. $\frac{2}{3}x + 198 = x$, и по предыдущимъ правиламъ будетъ $x = 594$, то есть, опряды соединятся между собою на 594 верстъ отъ Москвы.

Ибо во время перехода 594 верстъ вторымъ опрядомъ, первый долженъ пройти 396, потому что онъ идетъ по 16 верстъ, а второй по 24 на день; но онъ за то имаетъ 16 верстъ впереди за день и 182 версты, разстояние отъ Москвы до Тулы, которое какъ бы имъ уже было пройдено; слѣд. онъ долженъ быть также на 594 версты отъ Москвы, то есть, въ одномъ мѣстѣ со вторымъ опрядомъ.

Съ малѣйшимъ вниманіемъ примѣнить можно, что при перемѣнѣ чиселъ даннаго вопроса, порядокъ ршенія и заключеній не можетъ перемѣниться. Представимъ вообще чрезъ a разстояние 182 верстъ между двумя мѣстами, изъ которыхъ назначенъ походъ; чрезъ b число дней, которое впереди имѣетъ первый опрядъ въ назначеннй втораго; чрезъ c число верстъ предписанное итти на день первому; и чрезъ d число верстъ, предписанное итти на день второму.

Наконецъ положивъ x за это число верстъ, какое долженъ перейти второй опрядъ до соединенія съ первымъ, поступаю какъ выше.

Опредѣляю нуль перваго опрядъ посылкою d :
 $a = x$: онъ будетъ ссознать изъ $\frac{c \times x}{d}$, или просто

изъ $\frac{cm}{a}$. Но поелику предположили мы, что первой опрядѣ должно идти число c верстѣ на день; слѣд. онѣ пройденѣ въ число b дней $c \times b$ или bc верстъ, то есть, въ 8 разѣ больше, нежели b равно 8, въ 30 разѣ больше, если b равно 30; вообще онѣ должны пройти столько, сколько находится единицъ въ bc : слѣд. онѣ прошли количество, изображенное чрезъ bc .

Сложу теперь число верстѣ $\frac{cm}{a}$ съ числомъ bc и съ числомъ верстѣ a ; сумма $\frac{cm}{a} + bc + a$ покажетъ нуль втораго опряда до сдѣланиа его съ первымъ; но мы положили его x ; слѣд. $x = \frac{cm}{a} + bc + a$. Изъ сего уравненія вывожу $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, а по сему последнему заключаю о рѣшеніи всякѣхъ подобныхъ такого свойства, въ которыхъ присутствуютъ, что оба опряда выступавшія въ подобіе къ одному мѣсту, и что опрядѣ, которой идемъ медленнѣе, отходитъ напередѣ.

Для показанія употребленія сей формулы, возвратимся къ предыдущему примѣру и припомнимъ, что a представляетъ 182 версты, $b = 1$ день, $c = 16$ верстамъ, $d = 24$ верстамъ; слѣд. всѣ величины x изобразятся чрезъ $x = \frac{1 \times 16 \times 24 + 182 \times 24}{24 - 16}$, то есть,

$$\text{чрезъ } x = \frac{384 + 4368}{8} = 594, \text{ какъ выше.}$$

На примѣръ, еслили будетъ данъ сей долгій вопросъ: Часовая стрѣлка стоитъ на 17 минутѣ, а минутная на 24-ой, то есть, часы показываютъ 3 ч. 21'; спрашивается, въ которомъ часу и минутѣ сойдутся обѣ стрѣлки вмѣстѣ?

Поелику предполагается здѣсь, что часовая и минутная стрѣлки идутъ въ одно время, то количе-

символа b , которыми предположили мы прежде, чѣмъ вѣдѣвшисѣмъ походить оного ошрѣда противъ двуглаго, зѣбъ равно нулю. Раздѣленіе двухъ мѣснѣ, ошкда начъ начнѣмъ ишпи сирѣлки, изображающѣ зѣбъ ишмѣ прѣсрѣншвомѣ, которѣе нужно минушней сирѣлки рѣбѣжнѣ сѣ 24 раздѣленій часового круга до 17, то естѣ, $a = 53$ раздѣленіймѣ; но во всемя, какъ минушняя сирѣлка прѣбываетъ 60 раздѣленій, часовая проходитъ ихъ только 5, слѣд. $c = 5, d = 60$. По-

елику $b = 0$, то умножаемъ въ формулѣ $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$

членъ bcd , или $b \times cd$, потому что изъ умноженія всякаго числа на нуль выходитъ нуль. И такъ въ настоящемъ случаѣ величина x изобразится чрезъ

$x = \frac{ad}{d - c}$; вставивъ въ мѣсто a, d, c величины

ихъ, получу $x = \frac{5 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57 \frac{45}{55} = 57 \frac{9}{11}$;

то естѣ, надлежитъ минушней сирѣлкѣ пройти 57 раздѣленій и $\frac{9}{11}$;

а какъ она сшюла на 24 раздѣленій, то въ то время, какъ догонитъ часовую, будетъ отвѣчать уже 81 раздѣленію и $\frac{9}{11}$, или по

причинѣ, что 60 раздѣленій составляющѣ цѣлой кругъ, обѣ сирѣлки должны сойтися на 21' $\frac{9}{11}$ слѣ-

дующаго часу, то естѣ, пятого.

Преимущество литеральныхъ рѣшеній надъ числовыми состоитъ не только въ томъ, что для опредѣленія искомымъ количествъ всякаго особаго вопроса, сшюитъ только вставить въ мѣсто буквъ долженивующія предшавляющѣ ихъ числа; но и еще часно посредствомъ нѣкотораго приуготовленія выражающѣ сѣ рѣшенія такъ просто и легко, что можно ихъ во всякомъ случаѣ припомнить. На при-

мѣрѣ, найденную формулу $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ можно пред-

ставивъ въ настоящемъ случаѣ чрезъ $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$,

потому что d служилъ общимъ факторомъ обоимъ членамъ числителя. Но не трудно примѣнить тотъ симъ видомъ формулы, что величина x происхожденіи четвертымъ членомъ произвѣдѣнія, въ которой первая первыми служатъ $d - c$; $d = a + bc$; между ними первая членами первой $d - c$ показываесть разность скоростей двухъ отрядовъ, вторая d означаесть скорость въ второго отряда, а третья $a + bc$ соотвѣтствуетъ изъ разстоянія a двухъ мѣстъ, откуда a и значеъ походу, и изъ количества bc или $x \times b$, означающаго сколько первый отрядъ уходиъ верстъ въ искомой, данныхъ ему воедѣ; такъ что $a + bc$ показываеъ: все то разстояніе, которое имѣеъ въпереди первый отрядъ; и слѣд. рѣшеніе предложеннаго вопроса можеъ быть выражено такъ: умножь путь, содершаемый въ день первымъ отрядомъ, на числитель, даеъ ему воедѣ, и произведеіе сложиъ съ разстояніемъ двухъ мѣстъ изъ которыхъ, назначеъ походу, дабы слѣдующее тройное правило: какъ разность скоростей двухъ отрядовъ содержится къ скорости воедѣ, такъ сумма означенныхъ выше двухъ членовъ къ четвертому члену: сей четвертый членъ покажеъ, какое число верстъ нужно пройди второму отряду до соединенія съ первымъ. Такойъ образъ въ предыдущемъ примѣрѣ должно, (сложивъ 16 верстъ съ 182, разстояніемъ между двумя годами, изъ коихъ идуъ походу отряды, оиъ что въ суммѣ выходиъ 198), съскаси четвертой членъ въ пропорціи $24 - 16 : 24 = 198$; или $1 : 3 = 198$; сей четвертой членъ будеъ такой же, какъ выше, 594.

Разсужденія о положительныхъ и отрицательныхъ Количествахъ.

61. Выведенныя такимъ образомъ общія формулы для рѣшенія всѣхъ вопросовъ одного свойства, можно не рѣдко употреблять и для рѣшенія другихъ, коихъ условія совсѣмъ противны первымъ. Часто довольно для сего бываетъ одной перемены въ знакахъ \pm на

—, или — на $+$. Но прежде нежели познакомимся съ симб новымъ употребленіемъ знаковъ, разсмотримъ ихъ въ новомъ видѣ.

Буквы представляютъ совершенную величину количествъ. Знаки $+$ и $-$ представляли доселѣ одинъ только дѣйствія сложенія и вычитанія; но они могутъ представлять также во многихъ случаяхъ взаимное отношеніе количествъ между собою.

Можно разсматривать одно и тоже количество въ двухъ противныхъ видахъ, или какъ способное увеличить какое нибудь другое количество, или уменьшить его. Пока количество сіе представлять будетъ какая нибудь буква или число, ничто не можетъ означить, въ какомъ видѣ оно принимается. На примѣрѣ въ положеніи человека, имѣющаго на себѣ столько долгу, сколько имѣнія, можетъ одно и тоже число служить къ означенію числовой величины того и другого состоянія; всеѣмъ шѣмъ число сіе, какое бы въ прочемъ ни было, не можетъ показывать разности между долгомъ и имѣніемъ. Самое натуральное средство дать почувствовать сію разность, заключается изображать знаками противныя ихъ дѣйствія; а какъ долги уменьшаютъ имѣніе, то поставляеся предъ ними знакъ $-$.

Равнобѣрно размѣщая прямую линию (фиг. 1) какъ производную изъ перпендикулярнаго движенія точки А къ линіѣ ВС, не трудно увѣриться, что точка А могла простирааться какъ отъ А къ D, такъ и отъ А къ E; еслии представимъ здѣланной ею путь AD или AE чрезъ a , то симъ не означимъ еще совершеннаго положенія той точки. Для опредѣленія же его надобны знаки, которой бы показавъ, какъ должно принимать a , въ право или въ лѣво: но знаки $+$ и $-$ служатъ равно и для сего дѣйствія; ибо размѣщая движеніе точки А относительно къ точкѣ L, извѣстной и принимаемой за постоянной предѣлъ, понимаемъ, что путь ея къ D долженъ увеличить LA, а путь ея къ E уменьшить LA; и такъ неоспоримо слѣдуетъ представить AD чрезъ $+$ a , или просто чрезъ a ; и напротивъ AE чрезъ $-$ a . Относя же движеніе точки А не къ L, но къ O, прошивно предыдущему поступать надобно.

И такъ отрицательныя количества столько же существенны, какъ и положительныя; и разнясь съ ними въ томъ только, что принимаются прошивно въ исчисленіяхъ.

Положительныя количества могутъ находиться въ исчисленіяхъ, и часто нахо-

дятся перемѣшаны съ отрицательными не только для того, что по нѣкоторымъ дѣйствіямъ принуждены бываемъ вычитать одни количества изъ другихъ; но и еще потому, что не рѣдко требуется нужда представить въ рѣшеніи разные виды, въ которыхъ приемлются количества.

Впрочемъ, въ какомъ бы видѣ не принимали мы отрицательныя количества, предписанныя правила для разныхъ дѣйствій остаются отъ того не меньше одинаковы, въ чемъ можемъ увѣриться еще больше по слѣдующимъ разсужденіямъ.

62. Если по разрѣшеніи вопроса случится неизвѣстная величина, найденная по выше предписаннымъ правиламъ, отрицательною; на примѣръ, если случится прійти до такого результата $x = - 3$, то должно заключить, что количество, означенное чрезъ x , имѣетъ совсѣмъ противныя свойства тѣмъ, которыя предположены рѣшеніемъ. На примѣръ слѣдующій вопросъ: *найти такое число, которое бы съ 15 равнялось 10*, будетъ безъ сомнѣнія не возможной. Представивъ искомое число чрезъ x , получимъ уравненіе $x + 15 = 10$, и слѣд. въ силу предыдущихъ правилъ $x = 10 - 15$, или $x = - 5$. Сие послѣднее

заключение показываетъ, что количество x не таково свойства, въ какомъ мы его принимали; ибо не складывать его съ 15, но вычитать изъ 15 должно. И такъ всякое отрицательное рѣшеніе, означая нѣкоторое ложное предположеніе въ смыслѣ вопроса, показываетъ въ шожъ время и поправку, то есть, показываетъ, что искомое количество должно привимать въ противномъ свойствѣ.

63. Заключимъ изъ сего, что если-ли по разрѣшеніи вопроса, гдѣ нѣкоторые количества были принимаемы въ извѣстномъ смыслѣ, захотимъ послѣ перерѣшить его, принявъ тѣже количества въ другомъ противномъ свойствѣ; то для такого перерѣшенія стоимъ только перемѣнить знаки, находящіеся при тѣхъ количествахъ. На примѣрѣ, еслии рѣшивши вообще четвертый вопросъ, въ которомъ предполагается, что два ошряда идутъ къ одной сторонѣ, захотимъ послѣ имѣть формулу для рѣшенія вопросовъ такого свойства, гдѣ бы предполагалось, что оба ошряда идутъ другъ другу на встрѣчу; то для сего надлежитъ перемѣнить въ найденной величинѣ $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ знакъ, стоящій предъ c . Въ самомъ дѣлѣ, поелику первой ошрядъ идетъ на встрѣчу второму, то слѣд. cd не удаляется отъ

него, но сокращаемъ нуль его, и сокращаемъ
пусть сей пропорціонально собственному сво-
ему нулю c , которой онъ совершаетъ въ часъ
или въ день; слѣд. должно изобразить c не при-
бавляющимъ, но убавляющимъ количествомъ;
слѣд. вмѣсто $+$ c надлежитъ поставитъ $- c$.
Послѣ такой перемѣны выходитъ $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$;
потому что перемѣнивъ знакъ количества c
въ членѣ $+$ bcd , который происходитъ изъ
 $+$ $bdx + c$, надлежитъ послѣ написать ...
 $+$ $bdx - c$, а изъ сего (24) происходитъ
 $- bcd$. Ибо знакъ $-$ количества c означаетъ
по данному понятію, что $- c$ должно быть
употреблено противно количеству c съ
знакомъ $+$; но какъ въ предыдущемъ
случаѣ c показывало, сколько разъ должно
сложить bd , слѣд. въ настоящемъ будетъ
показывать, сколько разъ должно его вы-
честъ, и потому въ произведеніи выходитъ
 $- bcd$. И такъ вообще, (какъ скоро отри-
цательныя количества принимаются против-
но положительнымъ, и сія разность пола-
гается въ знакахъ двухъ противныхъ
дѣйствій), должно быть по необходимости
то, что для однихъ служивъ сложениемъ,
для другихъ вычитаніемъ, и на оборотъ;
такъ что ежели a безъ b , даетъ въ остат-
къ $a - b$, то a безъ $- b$ должно по необхо-

димости равняться $a + b$. Явствуемъ также, что по извѣщеніи всего сообразно данному понятію обѣ отрицательныхъ количествъ, оба сіи дѣйствія равняются одно въ другое при переходѣ отъ положительныхъ количествъ къ отрицательнымъ, и обратно, сохраняя, собственно сказать, одно названіе; ибо по одному только сходству говоримъ, что изъ a должно вычесть — b .

Подтвердимъ примѣромъ все это, что сказали мы о употребленіи переменъ въ знакахъ при рѣшеніи вопросовъ съ противными условіями. Положимъ, что два курьера поехали другъ другу на встрѣчу изъ разныхъ мѣстъ, разстояніемъ на 400 верстѣ: первый поехалъ 7 мѣся часами прежде втораго и ѣдущъ въ часъ 3 версты, а другой въ часъ 12 верстѣ; спрашиваемся, гдѣ они встрѣятся? Назвавъ x путь втораго курьера до встрѣчи его съ первымъ, заключаю, что количесиво x должно равняться разности между всѣмъ разстояніемъ и дорогою перваго курьера; то путь сего сошлени въ первыхъ изъ той дороги, которую онъ можетъ проѣхать въ 7 часовъ, и еще изъ той, которую проѣдетъ во время пути втораго курьера. Сія послѣдняя дорога опредѣлилась посылкою 12:

8, или $3:2 = x:$ и слѣд. будетъ равняться $\frac{2x}{3}$; а

посылку первой курьеръ долженъ еще проѣхать 56 верстѣ лишниихъ противъ втораго въ 7 часовъ, которые у него впереди; слѣд. вся его дорога будетъ

состоятъ изъ $56 + \frac{2x}{3}$; и такъ для пути втораго

остаеися количесиво $400 - 56 - \frac{2x}{3}$, или $344 - \frac{2x}{3}$;

слѣд. $x = 344 - \frac{2x}{3}$: изъ сей экваціи выходитъ $x =$

$\frac{1032}{5} = 206 \frac{2}{5}$. Еслили вставится въ формулѣ

$x = \frac{ad - bcd}{d - c}$, которая, какъ доказано выше, должна рѣшиться сей случай, 400 за a , 7 за b , 12 за d и 8 за c , то выйдетъ также $x = 206 \frac{2}{5}$.

Въ послѣдствіи не преминемъ познакомить больше съ офицательными количествами.

64. Поелику весьма нужно умѣть выводить уравненія изъ данныхъ вопросовъ, то для навыку обучающихся присовокупляемъ къ предыдущимъ задачамъ нѣсколько другихъ довольно легкихъ съ отвѣтами, которые послужатъ повѣркою ихъ опытамъ. По разрѣшеніи сихъ вопросовъ числами, совѣтуемъ послѣ рѣшить ихъ въ буквахъ; ибо съ производствомъ особенныхъ сихъ рѣшеній увеличиваются и распространяются понятія.

Сыскать такое число, которое прилано будучи порознь къ 5 и 12, даетъ двѣ суммы, находящіяся между собою, какъ 3:4? — — — — — отвѣтъ 16.

Сыскать такое число, котораго половина треть и $\frac{2}{5}$ сложены будучи вмѣстѣ, превосходятъ тоже число 7 мью? — — — — — отвѣтъ 30.

Спрашивается, во сколько времени сработать могутъ 100 аршинъ сукна три ткача, изъ которыхъ первый договорился ткать въ недѣлю 5 аршинъ, второй 7, а третій 8? — — — — — отвѣтъ въ 5 недѣль.

Нѣкто нанялъ лѣниваго работника по 24 копѣйки за каждой рабочей день съ условіемъ, считать изъ заслуженныхъ имъ денегъ по 6 копѣекъ за каждой нерабочей. По прошествіи 30 дней задѣланъ расчетъ, и ра-

ботникъ не получилъ ничего; спрашивается, сколько дней онъ работалъ? — — — — — Ошвѣшъ 6 дней.

Дровяникъ при поставкѣ дровъ въ нѣкоторое мѣсто получилъ всего барыша 135 рублей, а по расчету капитала 10 на 100; спрашивается, чего стоили дрова ему самому? — — — — — Ошвѣшъ 1350 рублей.

Нѣкто платилъ долгу въ 15 сроковъ, увеличивая каждой послѣдующій платежъ одинакимъ количествомъ; въ первый срокъ внесено 7 рублей, а въ послѣдній 37 руб. Спрашивается, чѣмъ увеличивались платежи? — — — — — Ошвѣшъ $2\frac{1}{7}$ рублями.

Въ нѣкоторой огнестрѣльной составѣ положено на 8 фунтовъ селитры 1 фун. сѣры; спрашивается, сколько надобно прибавить въ него еще селитры, чтобъ на 9 фунтовъ смѣси доставалось по 4 унции сѣры? — — — Ошвѣшъ 27 фунтовъ.

Объ Уравненіяхъ первой степени со многими неизвѣстными.

65. Въ вопросахъ, коими требуется опредѣлить нѣсколько неизвѣстныхъ, способъ представлять уравненія остается тотъ же, какой и въ тѣхъ, гдѣ предлагается узнать одно неизвѣстное. Но вообще должно дѣлать столько уравненій, сколько можно вывести ихъ изъ условій даннаго вопроса. Если всѣ условія различны и не зависятъ одно отъ другого, равно какъ каждое можно изобразить особымъ уравненіемъ, то такой вопросъ не можетъ имѣть кромѣ одного рѣшенія, памятуя при томъ тогда только, когда всѣ

сіи уравненія будутъ первой степени, и число ихъ равно числу неизвѣстныхъ количествъ. Но естли нѣкоторое изъ условій будетъ заключаться явно или скрытно въ какомъ нибудь другомъ, или естли число условій будетъ меньше числа неизвѣстныхъ; то уравненій будетъ меньше, чѣмъ неизвѣстныхъ, и вопросъ въ такомъ случаѣ можетъ имѣть безчисленное множество рѣшеній, по крайней мѣрѣ до тѣхъ перъ, пока какое нибудь особое условіе, котораго однакожъ не можно представить въ уравненіи, не ограничитъ числа ихъ. Все это изъяснимъ примѣрами.

Допустимъ сначала два уравненія съ двумя неизвѣстными. Хотя предписанныя правила для уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ служатъ равно и для уравненій со многими неизвѣстными; однакожъ для эквацій съ двумя неизвѣстными должно присовокупить еще слѣдующее.

66. Выведи въ каждомъ уравненіи величину одного и тогожъ неизвѣстнаго, поступая какъ бы все прочее было извѣстно: сравни обѣ сіи величины, чрезъ то получишь новую такую эквацію, въ которой останется одно только второе

неизвѣстное, которое опредѣли по предыдущимъ правиламъ. Сискавъ сіе второе неизвѣстное, поставъ величину его въ какомъ нибудь уравненіи перваго дѣйствія; чрезъ то получишь другое неизвѣстное.

На примѣрѣ, естли даны будутъ двѣ слѣдующія экваціи $2x + y = 24$; $5x + 3y = 65$. Изъ первой вывожу $x = \frac{24 - y}{2}$, изъ второй $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

Сравниваю обѣ величины x , и пишу $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$ уравненіе, въ которомъ остается одно только второе неизвѣстное y , и изъ котораго, по правиламъ уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ, выходящъ $y = 10$.

Для опредѣленія x , вставляю въ мѣсто y величину его то въ первой величинѣ количествъ x , найденной выше (можно равнымъ образомъ вставить ее и во второй). По вставкѣ получаю $x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

67. Возьмемъ для втораго примѣра два уравненія $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, и $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Привожу во первыхъ эти уравненія въ слѣдующія два другія (57) $24x - 25y = 60$, и $8x + 9y = 228$.

По томъ изъ перваго получаю $x = \frac{60 + 25y}{24}$

Изъ втораго $x = \frac{228 - 9y}{8}$

Сравнивъ двѣ величины x , вывожу $\frac{60 + 25y}{24} = \frac{228 - 9y}{8}$ эквацію, въ которой кромѣ y другаго неизвѣстнаго не находяща, и по которой заключаю, что $y = 12$.

Для опредѣленія x , ставлю вмѣсто y величину его 12 въшюй, или другой величины x ; на примѣрѣ въ первой, именно въ $x = \frac{60 + 25y}{24}$; послѣ чего получаю $x = \frac{60 + 25 \times 12}{24} = \frac{360}{24} = 15$.

68. Возьмемъ для третьяго примѣра два такіа уравненія $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$, и $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Начинаю уничтоженіемъ знаменателей (57), и получаю

$$56x = 35x + 60y - 1260$$

$$\text{и } 56x - 20y = 35y - 420$$

$$\text{Изъ перваго вывожу } x = \frac{60y - 1260}{21}$$

$$\text{Изъ втораго } x = \frac{55y - 420}{56}$$

Сравнивъ обѣ величины x , нахожу $\frac{60y - 1260}{21} = \frac{55y - 420}{56}$ эквацію, изъ которой получаю $y = 28$.

Для опредѣленія величины x , вставляю въ прежде найденномъ уравненіи $x = \frac{60y - 1260}{21}$ вмѣсто y величину его 28; отъ чего происходитъ --

$$x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20.$$

69. Возмемъ двѣ линейныя экваціи $ax - by = c$ и $dx + fy = e$, въ которыхъ a, b, c, d, e, f означаютъ извѣстные положительныя или отрицательныя количества.

Первая даетъ $x = \frac{c - by}{a}$; вторая $x = \frac{e - fy}{d}$.

Сравнивъ обѣ величины x , получимъ $\frac{c - by}{a} = \dots$

$\frac{e - fy}{d}$; по уничтоженіи дробей и по перестановкѣ

членовъ выходитъ $afy - bdy = ae - cd$, а изъ сей

$y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Для опредѣленія величины x надлежитъ вставить въ какомъ нибудь прежнемъ уравненіи, на примѣръ въ $x = \frac{c - by}{a}$, въ мѣсто y величину его

$\frac{ae - cd}{af - bd}$; послѣ чего произойдетъ $x = \frac{c - b \times \frac{ae - cd}{af - bd}}{a}$,

или по приведеніи c въ дробь $x = \frac{afc - bcd - abe + bcd}{af - bd}$,

или $x = \frac{afc - abe}{aaf - abd}$, или наконецъ (33) $x = \frac{fc - be}{af - bd}$.

70. До сихъ поръ предполагали мы вездѣ, что оба неизвѣстныхъ находятся въ каждомъ уравненіи; когдажъ этого не случится, то рѣшеніе не только не переменится, но еще здѣлается проще.

На примѣръ, если даны будутъ двѣ такія экваціи $5a x = 3b$, и $c x + dy = e$; то изъ первой выве-

ду $x = \frac{3b}{5a}$, изъ второй $x = \frac{e - dy}{c}$. Сравнивъ двѣ величины x , получу $\frac{7b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$; по уничтоженіи знаменателя, по перенесавъ членовъ и по приведеніи найду $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

О Уравненіяхъ первой степени съ тремя и большимъ числомъ неизвѣстныхъ.

71. Выразумѣвши надлежащимъ образомъ все сказанное, не трудно понять, какъ должно поступать съ большимъ числомъ уравненій и неизвѣстныхъ.

Предположивъ, что вопросъ содержитъ въ себѣ сколькожъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ, допустимъ на примѣръ, что онъ заключаетъ въ себѣ три уравненія съ тремя неизвѣстными; по для рѣшенія такого вопроса — — — *Выведи въ каждомъ уравненіи величину одного и тогожъ неизвѣстнаго, какъ бы все прочее было извѣстно; сравни потомъ первую величину со второю и съ третьею, или сравни первую со второю, а вторую съ третьею, отъ чего произойдетъ двѣ эквации съ двумя неизвѣстными, съ которыми поступай по правилу (66).*

Пусть для примѣра будутъ даны три слѣдующія уравненія — — —

$$3x + 5y + 7z = 179.$$

$$8x + 3y - 2z = 64.$$

$$5x - y + 3z = 75.$$

$$\text{Изъ перваго вывожу } x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$$

$$\text{Изъ втораго } - - x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$$

$$\text{Изъ третьяго } - - x = \frac{75 + y - 3z}{5}$$

Сравнивъ первую величину x со второю, получаю $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$

Сравнивъ ту же первую величину x съ третьею, получаю $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$

А какъ въ обоихъ послѣднихъ уравненіяхъ находится только два неизвѣстныхъ, то поступаю по правилу (66).

Беру въ каждой изъ двухъ эквацій величину y ;
въ первой получаю $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, во второй $y = \frac{670 - 26z}{28}$

Сравниваю обѣ величины y , и вывожу $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, котораго величина есть $z = \frac{13950}{930} = 15$.

Для опредѣленія y , вставляю въ найденной выше экваціи $y = \frac{1240 - 62z}{31}$ въ мѣсто z величину его 15, и получаю $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Напоследокъ для опредѣленія x , вставляю въ какойнибудь изъ означенныхъ выше трехъ величинъ сего количества вмѣсто y и z величины ихъ 10 и 15, на примѣръ, вставляю въ $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$, которая и превращается въ $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Еслили каждое неизвѣстное не будетъ заключаться въ каждомъ уравненіи, то рѣшеніе здѣлается ошѣ того легче, однако въ точности сходствуетъ съ предыдущими.

На примѣръ, еслили дано будетъ рѣшеніе три уравненія $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, и $3x + 4z = 57$, то —

Изъ перваго вывожу $x = \frac{65 - 3y}{5}$; во второмъ не находясь величины x ; въ третьемъ $x = \frac{57 - 4z}{3}$; слѣд. должно сравнить только двѣ величины x , и по тому получаю $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$ эквацію, въ которой не заключается больше x , и которую сравнивъ со второю $2y - z = 11$ по правиламъ уравненій съ двумя неизвѣстными, опредѣлю y и z . По окончаніи выкладки найду $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

72. Изъ предыдущаго явствуетъ, что сколько бѣ не было уравненій, общее правило для рѣшенія ихъ остается одинаково, именно ... *Выведи въ каждомъ уравненіи величину одного и тогожѣ неизвѣстнаго; сравни какуюнибудь изъ сихъ величинъ со всѣми прочими, чрезъ что уничтожишь одну*

эквацию и одно неизвѣстно. Поступая съ остальными уравненіями также, какъ прежде, получишь еще уравненій и неизвѣстныхъ единицею меньше. Продолжай поступать такъ до тѣхъ поръ, пока наконецъ дойдешь до одного неизвѣстнаго.

73. Не бесполезно, думаю, будемъ помѣстимъ здѣсь еще другой способъ для опредѣленія величины неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ первой степени.

На примѣрѣ, двѣ эквации $3x + 4y = 81$ и $3x - 4y = 9$ можемъ рѣшиться иначе такимъ образомъ. Если вычтемъ вторую изъ первой, то получится $8y = 72$, и слѣд. $y = \frac{72}{8} = 9$; а когда сложимъ ихъ между собою, то получимъ $6x = 90$, и слѣд. $x = \frac{90}{6} = 15$. Изъ сего примѣра замѣтимъ, какъ легко рѣшится два такія уравненія, въ коихъ коэффициенты сходныхъ неизвѣстныхъ будутъ одинаковы.

А чтобъ привести уравненія въ такое состояніе, то должно умножить одно изъ нихъ на приличное число. И вотъ какимъ образомъ находимся это число, на примѣрѣ, въ данныхъ двухъ эквацияхъ $4x + 3y = 65$, и $5x + 8y = 111$.

Представляю чрезъ m искомое число, и умножая имъ какую нибудь изъ экваций, на примѣрѣ вторую; отъ чего происходить $5mx + 8my = 111m$. Складываемъ ее съ первой, и получаю $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$; эту послѣднюю можно написать такъ $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Теперь, чтобъ уничтожить x , споймъ только положимъ за m такое число, чтобъ $4 + 5m = 0$; и

слѣд. $m = -\frac{4}{5}$. Сіе положеніе превращаетъ уравненіе въ $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, изъ котораго выходящій $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$, такое другое, которе, еслили подставишь въ немъ за m величину его, пере-

$$мѣнився въ $y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7.$$$

Но для уничтоженія y , надлежитъ за m положить такое число, чтобъ $3 + 8m = 0$; по сему, надлежитъ приравнять къ нулю коэффициентна или множителя y ; и слѣд. получимъ $m = -\frac{3}{8}$. Положеніе сіе превращаетъ эквацію въ $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, изъ которой выходящій $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m}$ такое уравненіе, которе, по вставкѣ за m найденной

$$величины его $-\frac{3}{8}$, даетъ $x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11.$$$

Еслили дано будетъ рѣшить три уравненія съ тремя неизвѣстными, въ такомъ случаѣ должно умножить второе на число m , а третье на число n ; и сложивъ ихъ такимъ образомъ умноженные съ первымъ, положивъ коэффициентна каждаго умноженнаго неизвѣстнаго равнымъ нулю. Для опредѣленія m и n получишь двѣ экваціи, съ которыми поступиай, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Возмемъ для примѣра три прежнія уравненія $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$. Умноживъ второе на m , а третье на n , и сложивъ ихъ съ первымъ, получу $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$ эквацію, которую можно изобразить такъ,

$$(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n.$$

Еслили захочу узнатьъ z , то положу $3 + 8m + 5n = 0$ и $5 + 3m - n = 0$; онѣ чело эквація перемѣнятся въ $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, а изъ сей выдетъ $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; теперь спо-

нимъ только опредѣлимъ m и n , а сіе здѣлай посред-
ствомъ двухъ показанныхъ уравненій $3 + 8m + 5n = 0$ и $5 + 3m - n = 0$, съ которыми поступиай, какъ въ предыдущемъ случаѣ; то есть, умножь вторую эквацію на число p и сложи ее съ первую, онѣ чело произойдетъ $3 + 5p + 3m + 5n - pn = 0$, которую изобрази такъ: $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$; а чтобъ получить n , то положи $8 + 3p = 0$, и эквація перемѣнится въ $3 + 5p + (5 - p)n = 0$, изъ которой происходишь $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; но эквація $8 + 3p = 0$ дастъ $p =$

$$-\frac{8}{3}, \text{ слѣд. } n = \frac{31}{23}.$$

Производя дѣйствіе такимъ же образомъ, получишь $m = -\frac{28}{23}$; наконецъ вспа-

вивъ величины сіи въ величины z , найдемъ $z = 15$. Не трудно понять изъ сего производствъ, какъ должно поступать, еслилибъ въ сего z не требовалось опредѣлить x или y ; но какъ скоро найдемся одно изъ неизвѣстныхъ количествъ, то безполезно начинать вновь такуюжъ выкладку для остальныхъ другихъ, потому что можно опредѣлить ихъ посредствомъ вставки величины сего неизвѣстнаго въ данныя уравненія, онѣ чело число ихъ единичною уменьшится; и слѣд. прочія величины можно опредѣлить, производя такое рѣшеніе, какое было показано въ предыдущемъ примѣрѣ для двухъ эквацій.

**Примѣры на предыдущія правила
для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ,
заклотающихъ въ себѣ нѣсколько
неизвѣстныхъ.**

74. Вопросъ I. Дано два сорта ядеръ: шесть
большихъ съ десятию меньшими вѣсятъ 304 фунта,
а пятнадцать меньшихъ съ десятию большими 480
фунтовъ; спрашивается вѣсъ каждого сорта ядеръ?

Еслибы мнѣ извѣстенъ былъ вѣсъ ядра каждо-
го сорта, то умноживъ тяжеснѣ ядра большаго сор-
та на шесть, а меньшаго на десятию, сложилъ бы оба
произведенія вмѣстѣ: сумма должна въ такомъ слу-
чаѣ составить 304 фунта; равнобрно умноживъ вѣсъ
ядра большаго сорта на десятию, а меньшаго на пят-
нацать, и сложивъ оба произведенія снѣ вмѣстѣ, въ
суммѣ получилъ бы 480 фунтовъ. И такъ увѣрив-
шись въ этомъ, положимъ вѣсъ ядра большаго сорта
равнымъ x , а меньшаго y , и получимъ двѣ слѣдую-
щія экваціи $6x + 10y = 304$ и $10x + 15y = 480$.

Теперь остаеися только опредѣлить x и y ; по-
чему въ каждомъ уравненіи вывоку величину x ; изъ
перваго, по переснавкѣ въ немъ членовъ и по раздѣ-
леніи $x = \frac{304 - 10y}{6}$; изъ втораго $x = \frac{480 - 15y}{10}$;
сравнивъ обѣ снѣ величины, получаю $\frac{304 - 10y}{6} =$
 $\frac{480 - 15y}{10}$ эквацію, въ которой по вышепредписан-
нымъ правиламъ опредѣляю $y = 16$.

А чпобъ опредѣлить x , по взявши опять выве-
денную прежде величину x , именно $x = \frac{704 - 10y}{6}$,
и вставивъ вмѣсто y величину ея 16, нахожу
 $x = \frac{144}{6} = 24$; слѣд. ядра большаго сорта должны
быть 24 фунтовъ, а меньшаго 16. Въ справедливости

сего рѣшенія удостовѣряетъ то, что шесть 24 фунтовыхъ ядеръ съ десятиью 16 фунтовыми вѣсятъ въ самой вещи 304 фунта; и опять десять 24 фунтовыхъ съ пятадцатию 16 фунтовыми вѣсятъ 480 фунтовъ.

Вопросъ II. Пушка 24, состоящая изъ мѣди и олова, вѣситъ 5531 фунтъ, и заключаетъ въ себѣ 8,95 кубическихъ футовъ состава; требуется опредѣлить въ ней количество мѣди и олова, зная, что кубической футъ мѣди вѣситъ 630 фунтовъ, а олова 512?

Если извѣстно будетъ число кубическихъ футовъ каждого мешалла, то сложу оба числа сіи вмѣстѣ, сумма ихъ должна составить 8,95. Потомъ умножу 630 фунтовъ на число кубическихъ футовъ мѣди, произведеніе покажетъ количество мѣди, находящейся въ пушкѣ; равнобрно умножу 512 на число кубическихъ футовъ олова, въ произведеніи выйдетъ количество олова; наконецъ сложу оба произведенія, и сумма представитъ 5531 фунтъ, вѣсъ всей пушки.

Разсуждая такимъ образомъ, представимъ чрезъ x число кубическихъ футовъ мѣди, а чрезъ y олова; слѣд. по предположенію выходящъ $x + y = 8,95$ и $630x + 512y = 5531$.

Изъ первой экваціи вывожу $x = 8,95 - y$, изъ второй $x = \frac{5531 - 512y}{630}$; слѣд. $8,95 - y = \frac{5531 - 512y}{630}$
и $y = \frac{107,5}{118} = 0,911$.

Вставивъ величину сію въ уравненіи x , именно въ $x = 8,95 - y$, получу $x = 8,039$.

Хотя бы два вещества, входящія въ составъ, имѣли подробныя тяжестии (*) и не такія, какія пред-

(*) Подробною тяжестію называется такая тяжесть тѣла, кѣго величина или масса извѣстна. Говоря, что такое-то тѣло вѣситъ 12 фунтовъ, опредѣляемъ тѣмъ

положены въ предыдущемъ примѣрѣ, и при томъ величина или масса, такъ какъ и двѣой въѣ составъ, были даны составомъ другія; однакожъ способъ съединявъ количество каждого сорту вещества, означеннаго въ смѣсѣ. А дабы въ рѣшенія такого свойства вопросовъ заключить въ одно, то и положимъ вообще, что число кубическихъ футовъ всего состава двухъ сортовъ вещества будетъ — a

Въѣ составъ, изображенный въ фунтахъ — b

Въѣ кубическаго фуна одного вещества — c

Въѣ кубическаго фуна другого вещества — d

c и d представляютъ фунты.

Послѣ чего положивъ x за число кубическихъ футовъ перваго вещества, а y втораго, получимъ двѣ экваціи.

$$x + y = a$$

$$\text{и } cx + dy = b$$

Изъ первой выходимъ $x = a - y$, изъ второй $x = \frac{b - dy}{c}$; сравнивъ обѣ сѣ величины, дѣлаю уравненіе $a - y = \frac{b - dy}{c}$, изъ котораго вывожу $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Для опредѣленія величины x , вставляю въ уравненіи $x = a - y$ найденную величину y , и получаю $x = a + \frac{b - ac}{c - d}$, или по приведеніи (43)

$$x = \frac{b - ad}{c - d}.$$

одинъ только въѣ его, а не самой родъ вещества, изъ котораго онъ состоитъ; но говоря, на примѣръ, 12 кубическихъ дюймовъ обыкновенной воды въѣтъ 7 унцій и 6 граней, опредѣляемъ въ какомъ случаѣ вещество есть вещество воды, и сѣд. бываемъ послѣ въ составленіи опредѣлять въѣ всякой другой величины или количества того же рода воды.

И такъ по сысканнымъ величинамъ $x = \frac{b - ad}{c - d}$

и $y = \frac{ac - b}{c - d}$, можно вывести самое простое правило для общаго ршенія всѣхъ вопросовъ такого свойства.

Но прежде нежели предпишемъ правило сѣе, замѣтимъ т. е. что b означашъ цѣлой вѣсѣ состава; 2 е. a показывашъ число частей всего состава, d вѣсѣ частей одного втораго сорна; слѣд. ad означашъ вѣсѣ всей массы состава, какъ бы она состояла изъ одного вещества втораго сорна; наконецъ знаменатель $c - d$ представляшъ разность подробныхъ тяжестей каждаго сорну вещества.

Разбирая такимъ же образомъ величину y , увидимъ, что ac показывашъ вѣсѣ всей величины состава, какъ бы она состояла изъ одного перваго вещества. И такъ заключимъ выше объявленное правило.

Найди вѣсѣ величины состава, какъ бы та величина состояла изъ одного втораго вещества; вычти сей вѣсѣ изъ даннаго вѣсу всего состава, и остатокъ раздѣли на разность подробныхъ тяжестей обоихъ веществъ: частное покажетъ число частей перваго вещества, положеннаго въ составъ.

А чтобъ получить число частей втораго вещества, вычти сколько должна потянуть величина состава, еслибы она состояла вся изъ одного перваго вещества; вычти изъ нее данной вѣсѣ состава, и остатокъ раздѣли на ту же разность подробныхъ тяжестей.

Правило сѣе есть то же самое, которое въ Ариемскихъ называшся *Правиломъ Смѣшенія*.

Можно подъ сей вопросъ подвести множество другихъ, которые при первомъ взглядѣ покажутся опмѣнными. На примѣръ слѣдующій: *Перелить 522 фунта на 42 куса, изъ коихъ бы одни вѣсомъ были 24 фун. а другіе 6 фун.* Ибо съ малѣйшимъ вниманіемъ можно примѣнить, что вопросомъ симъ пребуеши-

ся пожѢ, какѢ бы: составѢ 42 кубическихѢ футовѢ еѢситѢ 522 фунта; изѢ двухѢ веществѢ, составляющихѢ его, кубической футѢ перваго еѢситѢ 24 фунта, а другаго 6 фун. Постижная по предыдущему правилу, найдемѢ, что 24 фунтовыхѢ кусковѢ должно вылиплѢ 15, а шести-фунтовыхѢ 27.

ТѢмѢ же правиломѢ можно рѢшить еще и слѣдующій вопросѢ: Кубической футѢ морской воды еѢситѢ 74 фунта, а дождевой 70 фун.; спрашивается, какія части должно взять морской и дождевой воды для составленія такой, которой бы кубической футѢ еѢсилѢ 73 фунта?

Не трудно понять всякому, какѢ полезно заблаговременно научившись представлять общимѢ образомѢ извѢщенные количества данного вопроса, и разбирать Алгебраическіе результаты рѢшеній.

ВопросѢ III. Дано три слитка, состоящіе изѢ золота, серебра и мѢди; составѢ перваго слитка таковѢ, что еѢ 16 унціяхѢ его заключается 7 золота, 8 серебра и 1 мѢди; еѢ 16 унціяхѢ втораго находится 5 золота, 7 серебра и 4 мѢди; напоследокѢ еѢ 16 унціяхѢ третьяго 2 золота, 9 серебра и 5 мѢди. Требуется изѢлить изѢ сихѢ слитковѢ четвертой таковой, котораго бы еѢ 16 унціяхѢ находилось $4\frac{15}{16}$ унцій золота, $7\frac{10}{16}$ серебра, и $3\frac{7}{16}$ мѢди?

ПредставимѢ чрезѢ x число унцій, взятыхѢ изѢ перваго слитка, чрезѢ y изѢ втораго, и чрезѢ z изѢ третьяго.

Послику 16 унцій перваго слитка заключаютѢ вѢ себѢ 7 унцій золота, то для опредѣленія, какое число унцій золота должно находиться вѢ количествѢ x того же слитка, сыскиваю четвертой членѢ вѢ сей пропорціи $16:7 = x$; сей четвертой членѢ будетѢ $\frac{7x}{16}$; рассуждая такимѢ же образомѢ, найду, что

количество у второго слитка будетъ имѣть въ себѣ $\frac{5y}{16}$ золота, а количество z третьего $\frac{2z}{16}$. Сумма сихъ

трехъ количествъ состоятъ изъ $\frac{7x + 5y + 2z}{16}$; но

по положенію она должна равна быть $4 \frac{15}{16}$, или $\frac{79}{16}$;

слѣд. $\frac{7x + 5y + 2z}{16} = \frac{79}{16}$

Для выполненія второго условія, замѣтъ,

что во взятомъ количествѣ x унцій изъ первого

слитка, должно находиться $\frac{8x}{16}$ серебра, въ количе-

ствѣ у второго $\frac{7y}{16}$, и наконецъ въ количествѣ z

третьего $\frac{9z}{16}$; сумма сихъ трехъ количествъ состо-

итъ изъ $\frac{8x + 7y + 9z}{16}$; а какъ сумма сія должна рав-

няться $7 \frac{10}{16}$ или $\frac{122}{16}$, то $\frac{8x + 7y + 9z}{16} = \frac{122}{16}$.

Поступая такимъ же образомъ, получу въ сход-

ственность третьего условія слѣдующую эквацію

$$\frac{x + 4y + z}{16} = \frac{55}{16}$$

Какъ число 16 служитъ общимъ дѣлителемъ въ

каждой части всѣхъ трехъ эквацій, то по уничто-

женіи его произойдутъ слѣдующія три въ другомъ

видѣ.

$$7x + 5y + 2z = 79$$

$$8x + 7y + 9z = 122$$

$$x + 4y + z = 55$$

Выводя въ каждомъ изъ сихъ уравненій вели-

чину x , получу - - -

Часть III. Е

$$x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$$

$$x = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

$$x = 55 - 4y - 5z$$

Сравнивъ первую величину x со второю и съ третьею (71), буду имѣть — — — 1

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

$$\text{и } \frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z,$$

уравненія съ двумя только неизвѣстными, съ которыми и поступаю по объявленному (66).

И для того, уничтоживъ въ нихъ знаменателей, выведу величины y — — — — —

$$y = \frac{222 - 47z}{9}$$

$$\text{и } y = \frac{306 - 33z}{23}$$

Сравнивъ двѣ величины сѣи y между собою, получу $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$, а по совершеніи обыкновенныхъ дѣйствій $z = \frac{2252}{784} = 3$.

Для опредѣленія величины y , вставляю въ какомъ нибудь изъ уравненій его, на примѣръ въ . . .

$$y = \frac{222 - 47z}{9}, \text{ въ мѣсто } z \text{ величину его } 3, \text{ и нахожу}$$

$$y = \frac{81}{9} = 9.$$

Напоследокъ, для опредѣленія величины x , вставляю въ мѣсто y и z найденныя величины ихъ 9 и 3 въ какомъ нибудь изъ трехъ его уравненій, на

примѣръ въ $x = 55 - 4y - 5z$, послѣ чего выходитъ $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; и такъ для составленія чешвертаго слитка надлежитъ взять, на 16 унцій его, 4 унціи изъ перваго, 9 изъ втораго и 3 изъ третьяго; и тогда сей новый слитокъ будешь содержать въ сходственности требованія $4 \frac{15}{16}$ унцій золота, $7 \frac{10}{16}$ серебра и $3 \frac{7}{16}$ мѣди.

Въ самой вещи, поелику первой слитокъ содержитъ въ 16 унціяхъ 7 золота, 8 серебра и 1 мѣди, то взявши изъ сего слитка только 4 унціи, получишь въ этомъ количествѣ золота $\frac{28}{16}$, серебра $\frac{32}{16}$, а мѣди $\frac{4}{16}$. По той же причинѣ въ 9 унціяхъ втораго слитка будетъ заключаться золота $\frac{45}{16}$, серебра $\frac{63}{16}$, а мѣди $\frac{36}{16}$; и въ трехъ унціяхъ третьяго будетъ находиться золота $\frac{6}{16}$, серебра $\frac{27}{16}$, мѣди $\frac{15}{16}$.

Сложивъ вмѣстѣ три количества каждаго сорту металловъ, происходящія изъ данныхъ трехъ слитковъ, въ суммѣ получишь $\frac{70}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$, или $4 \frac{15}{16}$, $7 \frac{10}{16}$ и $3 \frac{7}{16}$ точно тѣ количества золота, серебра и мѣди, изъ которыхъ долженъ состоять чешвертой слитокъ.

Отъ того, въ какихъ случаяхъ данные Вопросы остаются неотрѣбленными и въ какихъ они бываютъ невозможными.

75. Не рѣдко случается, что вопросы, въ которыхъ хотя и находится столько же

уравнений, сколько неизвѣстныхъ, бываютъ совсѣмъ тѣмъ неопредѣленны, то есть, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній.

Это случается тогда, когда нѣкоторыя изъ условій, хотя по видимому разнятся между собою, въ самой же вещи бываютъ одинаковы. Эквации, изображающія такія условія, происходятъ или изъ умноженія однихъ на другія, или вообще нѣкоторыя изъ нихъ состоятъ изъ одной или многихъ другихъ, сложенныхъ или вычтенныхъ, умноженныхъ или раздѣленныхъ на какія нибудь числа. На примѣръ вопросъ, изъ котораго происходятъ слѣдующія три уравненія,

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 17 \\ 8x + 2y + 4z &= 20 \\ 18x + 8y + 8z &= 54 \end{aligned}$$

будетъ состоятъ изъ неопредѣленнаго числа рѣшеній, хотя и кажется по уравненіямъ, что x , y и z должны имѣть по одной только величинѣ. Ибо послѣдняя между сими тремя эквациями состоитъ изъ второй, сложенной съ удвоенною первою. Но нѣтъ нисколько сумнѣнія, что по допущеніи двухъ первыхъ, послѣдняя по необходимости выходитъ, и слѣд. она не представляетъ никакого новаго условія: въ вопросѣ столькожъ

извѣстно съ нею, сколько и съ двумя первыми. Скоро увидимъ, для чего въ вопросахъ, которые для трехъ неизвѣстныхъ заключаютъ только два уравненія, каждое неизвѣстное имѣетъ неопредѣленное число величинъ.

76. Неопредѣленные случаи узнаемъ по выкладкѣ: и вотъ какимъ образомъ. Когда поступая по вышепредписаннымъ правиламъ въ изысканіи неизвѣстныхъ, дойдешь до одной какой нибудь экваціи такой, которая заключается въ другихъ, то въ продолженіи выкладки выдеишь *одинаковое уравненіе* (équation identique), то есть, такое уравненіе, въ которомъ обѣ части не только будутъ равны между собою, но и еще будутъ состоять изъ подобныхъ и равныхъ членовъ. Сколько будетъ находиться одинаковыхъ въ вопросѣ эквацій, столько будетъ ихъ и бесполезныхъ.

На примѣрѣ, еслии въ каждомъ изъ слѣдующихъ двухъ уравненій $6x + 8y = 12$ и $x + \frac{4}{3}y = 2$, выведу величину x , то есть, $x = \frac{12 - 8y}{6}$ и $x = 2 - \frac{4}{3}y$; то по сравненіи обѣихъ сихъ величинъ, получу $\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, или по уничтоженіи знаменателей $36 - 24y = 36 - 24y$ одинаковое уравненіе,

которому не можно узнать величины y , ибо по переслаивкѣ членовъ и по приведеніи выходитъ $0 = 0$.

Равномѣрно и сѣи при уравненія доведутъ насъ до такою же заключенія,

$$5x + 3y + 2z = 24$$

$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$

$$15x + 9y + 6z = 72$$

Ибо нашедши въ первомъ уравненіи $x = \frac{24 - 3y - 2z}{5}$, во второмъ по уничтоженіи знаменателей, по переслаивкѣ членовъ и по приведеніи $x = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$, въ третьемъ $x = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$, по томъ сравнивъ первую изъ трехъ найденныхъ величинъ x со второю и съ третьею, получу $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$ и $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$, или по уничтоженіи въ нихъ знаменателей, буду имѣть $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, и $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$. одинаковыя уравненія, по которымъ не можно опредѣлить ни y , ни z , потому что оба сѣи уравненія превращаются въ $0 = 0$. Слѣд. между данными тремя находящися одна только настоящая эквація.

Вопросы, по содержанію которыхъ доходимъ до такихъ заключеній, бывають неопредѣленны, но не невозможны. Скоро покажемъ, какъ должно съ ними поступать.

77. Когда вопросъ, въ которомъ заключаются уравненія первой степени, бываетъ невозможной, то это примѣнить можно въ

продолженіи выкладки, которая доводитъ до несообразности; на примѣрѣ до такого заключенія, что $4 = 3$.

На примѣрѣ, еслии будутъ даны два такіа уравненія:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 30 \\ \text{и } 20x + 12y &= 135 \end{aligned}$$

То изъ перваго выходиши $x = \frac{30 - 3y}{5}$, изъ втораго $x = \frac{135 - 12y}{20}$; сравнивъ обѣ сіи величины, получимъ $\frac{30 - 3y}{5} = \frac{135 - 12y}{20}$, и по уничтоженіи знаменателей $600 - 60y = 675 - 60y$; послѣднее уравненіе доведетъ до заключенія $600 = 675$, которое безъ сумнѣнія не сообразно; слѣд. вопросъ, изъ котораго могутъ выйти двѣ такіа экваціи $5x + 3y = 30$ и $20x + 12y = 135$, должно починать за невозможной и несообразной.

78. Хотя отрицательныя рѣшенія показываютъ также нѣкоторой родъ невозможности въ вопросѣ; однакожъ невозможность сія не совершенная, и относится къ тому, въ какомъ смыслѣ должно принимать данныя количества; ибо много находится случаевъ, гдѣ рѣшенія такого свойства допускаются и бывають натуральны. *Смотри изъясненіе (62).*

О неопредѣленныхъ Задачахъ.

79. Неопредѣленную задачу называютъ всякой вопросъ, которой можно рѣ-

шить разными образами, не опредѣляя именно, какой больше приличествуетъ. Задачи такого свойства заключаютъ въ себѣ меньше условій, чѣмъ неизвѣстныхъ; и хотя, разсматривая ихъ вообще, они подлежатъ безчисленному множеству рѣшеній, однакожъ не рѣдко случается, что число сихъ рѣшеній ограничивается нѣкоторыми условіями. Но какъ сіи условія не могутъ быть представлены въ экваціяхъ, то не позволяющъ опредѣлить прямымъ образомъ, изъ какого числа рѣшеній долженъ состоять данной вопросъ.

На примѣръ, еслии будетъ данъ такой вопросъ: *найти два числа, которыхъ бы сумма равнялась 24?* То назвавъ x одно изъ искомыхъ чиселъ, а другое y , сдѣлаю уравненіе $x + y = 24$, изъ котораго выведу $x = 24 - y$. Но вопросъ сей можетъ подлежать безчисленному множеству рѣшеній, какъ скоро подъ x и y будемъ разумѣть какъ цѣлыя, такъ и дробныя числа, также положительныя и отрицательныя; ибо въ такомъ случаѣ стоимъ только принять за величину y , какое число угодно, и заключить о величинѣ x по экваціи $x = 24 - y$, поспавивъ за y число, принятое произвольно. По чему положивъ $y = 1$,

$y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{1}{2}$ и проч. получимъ $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{2}$ и проч. Но еслили потребуется сыскать одни цѣлыя числа и при томъ положительныя, тогда число рѣшеній сдѣлается ограниченнымъ; ибо какъ скоро x долженъ быть положительнымъ, то y не можетъ быть больше 24; а какъ при томъ спрашиваются цѣлыя числа, то найденное уравненіе должно имѣть всѣхъ рѣшеній только 25, включая туда же и 0. Такимъ образомъ положивъ попеременно $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ и проч. получимъ $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$ и проч.

80. Однакожъ не всегда можно съ такою легкостію, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, выполнить условіе, въ которомъ хотя и будетъ предположено, что искомыя числа должны быть цѣлыя и положительныя. Слѣдующіе вопросы покажутъ то на самомъ дѣлѣ.

Вопросъ I. Требуется узнать, сколькими образами можно заплатить 42 рубля, отдавая по 17 руб. и получая обратно по 11 рублей?

Здѣсь предполагается, что число платежей и обратныхъ пріемовъ не одинаково.

Представивъ число платежей чрезъ x , а обратныхъ пріемовъ чрезъ y , заключаю, что сумма отда-

ныхъ денегъ должна состоятъ изъ 17 x , а полученныхъ на оборотъ изъ 11 y , слѣд. всѣхъ денегъ будетъ заплачено только 17 x — 11 y ; но какъ по договору слѣдуетъ заплатить 542 руб., то дѣлаю такое уравненіе: 17 x — 11 y = 542. Вывожу наконецъ величину y , то есть, неизвѣснаго съ меньшимъ коэффициентомъ, и получаю $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Поедику кромѣ сей экваціи нѣтъ другой, по не трудно понять, что положивъ за x произвольное число, получишь тотчасъ и величину y , долженствующую рѣшить уравненіе. Но какъ вопросомъ претбуется, чтобы x и y были цѣлыя числа, то вопросъ какимъ образомъ прямо сыскать ихъ можно.

Величина $y = \frac{17x - 542}{11}$ приводится, (по учиненіи въ ней такого дѣленія, какое только можно здѣлать) въ $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; а какъ $\frac{6x - 3}{11}$ должно предсавлять цѣлое число, то пусть будетъ это число u : почему дѣлаю заключеніе, что $\frac{6x - 3}{11} = u$, и слѣд. $6x - 3 = 11u$, и $x = \frac{11u + 3}{6}$, или по раздѣленіи $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; но надлежитъ, чтобы $\frac{5u + 3}{6}$ составляло также цѣлое число, и пусть будетъ оно равно t ; и такъ $\frac{5u + 3}{6} = t$, или $5u + 3 = 6t$, и слѣд. $u = \frac{6t - 3}{5} = t + \frac{t - 3}{5}$; но какъ и $\frac{t - 3}{5}$ должно равняться цѣлому числу, то пусть будетъ оное число s ; почему $\frac{t - 3}{5} = s$, и слѣд. $t = 5s + 3$. Дѣйствіе здѣсь кончилось, потому что принявъ за s какое угодно цѣлое число, получишь за всѣ

личину t цѣлое же число такое, какое требуется вопросомъ, понеже ищѣ больше знаменателя въ уравненіи.

Возвратимся теперь къ величинамъ x и y . Поскольку нашли, что $x = \frac{6t - 3}{5}$, чего для поставивъ вмѣсто t сысканную величину его $5s + 3$, получишь $x = \frac{30s + 18 - 3}{5} = 6s + 3$; а какъ найдено также, что $x = \frac{11y + 3}{6}$, то поставивъ вмѣсто x величину его, получишь $x = \frac{66s + 33 + 3}{6} = 11s + 6$; на конецъ поскольку найдено, что $y = \frac{17x - 542}{11}$, то поставивъ за x величину его, получишь
 $y = \frac{187s + 102 - 542}{11} = 17s - 40$. Такимъ образомъ сходственные величины x и y будутъ $x = 11s + 6$ и $y = 17s - 40$. По первой эквации можно принять за величину s всякое число, какое угодно, но впрочемъ не позволяющъ взять его меньше 3; ибо y должно быть положительное число, и слѣд. $17s$ должно быть больше 40, или s должно быть больше $\frac{40}{17}$, что есть, больше 2.

И такъ можно рѣшить вопросъ сей разными и безчисленными образами, поставляя въ величинахъ x и y вмѣсто s всякія удобовообразимыя цѣлыя и положительныя числа, начиная отъ 3 до безконечности. Такимъ образомъ полагая попеременно $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, и проч. получишь за сходственные величины x и y слѣдующія числа . .

$x = 39$	$y = 11$
$x = 50$	$y = 28$
$x = 61$	$y = 45$
$x = 72$	$y = 62$
$x = 83$	$y = 79$

изъ которыхъ каждое такого свойства, что от-
давъ число разъ, означенное чрезъ x по 17 рублей, и
лучивъ на оборотъ означенное чрезъ y по 11 руб. во
всякомъ случаѣ будешь имѣть сумму, состоящую изъ
542 рублей.

Вопросъ II. Требуется перелить 741 фунтъ на
куски трехъ сортовъ, числомъ 41, именно на 24 фун-
товые, 19 фунтовые и 10 фунтовые?

Пусть будетъ x , y , z число кусковъ каждого
сорта; но велику всехъ ихъ должно быть 41, что
заключаю т. е. что $x + y + z = 41$.

2е. А какъ при томъ каждой кусокъ первого сор-
ту состоятъ изъ 24 фунтовъ, то число x кусковъ
должно заключать въ себѣ x разъ 24 фун. или $24x$;
по той же причинѣ y кусковъ второго сорта будетъ
состоять изъ 19у; а z кусковъ третьяго изъ 10z.
Въ вѣсѣхъ кусковъ разнаго разбору по положенію рав-
няется 741 фунту; и такъ заключаю наконецъ, что
 $24x + 19y + 10z = 741$.

Вывожу въ каждомъ изъ найденныхъ двухъ
уравненій величину какого нибудь неизвѣстнаго, на
примврѣ x , и получаю $x = 41 - y - z$ и

$$x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}; \text{ сравниваю обѣ величины } x \text{ ме-}$$

$$\text{жду собою и нахожу } 41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24},$$

$$\text{или по уничтоженіи знаменателя } 984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z, \text{ а по переславкѣ членовъ и по}$$

$$\text{приведеніи } 243 = 5y + 14z.$$

Беру величину y съ меньшимъ коэффициентомъ,
и вывожу $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$; но

какъ y и z должны быть цѣлыя числа, то надле-
житъ, чтобъ $\frac{3 - 4z}{5}$ представляло также цѣлое чи-

$$\text{сло, и положимъ оное } t. \text{ И такъ } \frac{3 - 4z}{5} = t, \text{ или}$$

$3 - 4z = 5t$, и $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; но $\frac{3 - t}{4}$ должно быть цѣлое число, и пусть будетъ оно u ; отъ чего произойдетъ $\frac{3 - t}{4} = u$, или $3 - t = 4u$, и слѣд. $t = 3 - 4u$.

Возвратимся теперь къ величинамъ x, y, z .

Поеліку найдено, что $z = \frac{3 - 5t}{4}$, по поставивъ въ мѣсто t , величину его $3 - 4u$, получишь $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; потомъ въ уравненіи $y = \frac{243 - 14z}{5}$ поставивъ за z величину его, получишь $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Наконецъ вмѣсто найденной величины $x = 41 - y - z$ получишь $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. Такимъ образомъ сходственными величинами x, y, z будутъ $x = 9u - 13, y = 57 - 14u$ и $z = 5u - 3$, въ которыхъ за мѣсто u можно принимать всякое цѣлое число, лишь бы въ заключеніи выходили положительныя числа для x, y и z ; но допущеніе сіе требуетъ еще трехъ другихъ, і. е. чѣмобъ $9u$ было больше 13, или u больше $\frac{13}{9}$, или $1\frac{4}{9}$...
2 е. чѣмобъ 57 было больше $14u$, или u меньше $\frac{57}{14}$, то есть, меньше $4\frac{1}{4}$; на послѣдокъ 3 е. чѣмобъ $5u$ было больше 3 или u больше $\frac{3}{5}$. Изъ сего должно заключить, что число рѣшеній весьма ограничено и состоиптъ только изъ трехъ. И пакъ полагая за величину u числа 2, 3 и 4,

и по снымъ вывода величины x , y , z , найдемъ, что 741 фунтъ можно переписать на требуемое число кусковъ проякимъ только образомъ, именно такъ . . .

x		y		z
5	- - - -	29	- - - -	7
14	- - - -	15	- - - -	12
23	- - - -	1	- - - -	17.

Объ Уравненіяхъ второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

81. Уравненіями второй степени называются тѣ, въ которыхъ неизвѣстное количество умножено само на себя, или представляетъ квадратъ.

На примѣрѣ $5x^2 = 125$ есть уравненіе второй степени, потому что количество x въ членѣ $5x^2$ умножено само на себя.

82. Уравненіе, въ которомъ не находится другой степени неизвѣстнаго, кромѣ квадрата его, рѣшится весьма легко: стоитъ только уничтожить въ неизвѣстномъ множителей или дѣлителей его, потомъ по переставкѣ въ другую часть экваціи всѣхъ количествъ, соединенныхъ съ тѣмъ неизвѣстнымъ знаками $+$ или $-$, извлечь квадратной корень изъ каждой части уравненія.

На примѣрѣ изъ уравненія $5x^2 = 125$, вывожу $x^2 = \frac{125}{5} = 25$; потомъ, извлекая квадратной корень изъ обѣихъ частей, получаю $x = 5$.

Равнымъ образомъ въ данномъ уравненіи $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, по уничтоженіи дробей и по переспавкѣ членовъ, нахожу $25x^2 - 12x^2 = 105$, или $13x^2 = 105$, или $x^2 = \frac{105}{13}$; и слѣд. $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Сей знакъ $\sqrt{}$ показываетъ, что изъ даннаго количества должно извлечь квадратной корень, и называется *радикаломъ*. Если нужно извлечь квадратной корень изъ всей дроби, то радикальной знакъ $\sqrt{}$ поставляется предъ обоими членами дроби, какъ показано было въ предыдущемъ примѣрѣ, именно въ $\sqrt{\frac{105}{13}}$.

Когдажъ надлежитъ означить квадратной корень одного какого нибудь члена дроби, то поставляется радикалъ въ таковомъ случаѣ предъ извлекаемымъ только. Почему для означенія квадратнаго корня изъ 50, раздѣленнаго на 3, пишу такъ $\frac{\sqrt{50}}{3}$; а для означенія 15, раздѣленнаго на квадратной корень изъ 5, поставляю $\frac{15}{\sqrt{5}}$. Наконецъ есть ли извлекаемое количество будетъ разнородное, то для предсавленія квадратнаго его корня приводится отъ радикала черта, покрывающая все то количество; на примѣрѣ $\sqrt{3ab + b^2}$ показываетъ, что изъ $3ab + b^2$

надлежитъ извлечь квадратной корень. Иногда черта сія не проводится, и извлекаемое количество изображается иначе заключеннымъ въ скобкахъ, на примѣръ $\sqrt{(3ab + b^2)}$ означаетъ тожь, что $\sqrt{3ab + b^2}$.

83. Поелику видѣли мы (24), что при умноженіи двухъ количествъ съ одинаковыми знаками, произведение ихъ имѣетъ всегда знакъ $+$; и такъ увѣрившись въ сей истинѣ, должно предъ корнемъ, выходящимъ изъ положительнаго количества, ставить произвольно знакъ $+$ или $-$.

Такимъ образомъ извлекая изъ $x^2 = 25$, можно заключить, что $x = +5$, или $x = -5$; ибо каждое изъ сихъ чиселъ, умноженъ будучи само на себя, даетъ въ произведеніи одинаково $+25$. Слѣд. по разрѣшеніи уравненія $x^2 = 25$, должно писать всегда такъ: $x = \pm 5$, и произносишь x равно *плюсъ* или *минусъ* 5.

Равномѣрно въ экваціи $x^2 = \frac{105}{13}$, должно изобразить корень неизвѣстнаго количества чрезъ $x = \pm \sqrt{\frac{105}{13}}$.

84. При извлеченіи квадратнаго корня изъ отрицательнаго количества, поставляется предъ всѣмъ количествомъ радикалъ, послѣдуемый за двойнымъ знакомъ \pm .

На примѣръ, для означенія квадратнаго корня въ данномъ уравненіи $x^2 = -4$, пишу такъ...

ко случается, что задача, сама по себѣ весьма возможная, не можетъ иначе рѣшена быть, какъ чрезъ стеченіе подобныхъ количествъ, въ которыхъ наконецъ все, что было несообразнымъ, уничтожается. Количества такого рода называются *умственными*.

И такъ $\sqrt{-a}$ есть количество умственное; $a + \sqrt{-b}$ будетъ также количество умственное.

36. Хотя не нужно болѣе извѣщать о рѣшеніи уравненій второй степени, когда въ нихъ кромѣ квадрата x не будетъ другой степени; но если сверхъ квадрата неизвѣстнаго количества случится еще и первая его степень, умноженная или раздѣленная на извѣстное количество, какъ въ слѣдующемъ примѣрѣ $x^2 - 4x = 12$, то вышеобъявленнаго недоспаточно. Способъ рѣшенія въ такомъ случаѣ зависитъ отъ нѣкотораго приготовленія эквации, именно, надлежитъ здѣлать первую ея часть совершеннымъ квадратомъ, а сіе производи такъ: 1°. перенеси въ одну часть уравненія всѣ члены съ x , а извѣстные въ другую; 2°. членъ, содержащій x^2 , долженъ быть положительнымъ; еслижъ онъ будетъ съ $-$, то переѣрни всѣ знаки уравненія, ибо такое дѣйствіе не переѣрнишь его; 3°. членъ x^2 не долженъ

имѣть ии множителя, ни дѣлителя: когдажъ они случатся, то уничтожь ихъ умноженіемъ всѣхъ прочихъ членовъ экваціи на дѣлителя, или раздѣленіемъ ихъ на множителя.

На примѣрѣ, данную эквацію $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$, рѣши такъ: т.е. перенеси всѣ x въ первую часть, поставивъ x^2 на первомъ мѣстѣ; получишь $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, или $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2е. пере-
мѣни знаки у всѣхъ членовъ, чтобъ заглавъ x^2 положи-
тельнымъ, и получишь $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3е. умножь на 5, отъ чего выдешъ $3x^2 - 30x = -20$; наконедѣ раздѣли на 3, и получишь $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

А какъ всякое уравненіе второй степе-
ни можно привести въ такое состояніе, то
мы займемся теперь рѣшеніемъ пригото-
вленныхъ такимъ образомъ эквацій.

87. По предположеніи сего приступай
къ рѣшенію уравненій второй степени, на-
блюдая слѣдующее правило.

*Возьми половину извѣстнаго количе-
ства, которое умножатъ x во второмъ
членѣ: составь изъ сей половины квад-
ратъ, и прибавь его къ обѣимъ частямъ*

уравненія, отбъ чего первая часть здѣлается совершеннымъ квадратомъ. Извлеки квадратной корень изъ каждой части, и поставь предъ корнемъ второй части двойной знакъ \pm ; послѣ чего эквація перемѣнится въ первую степень.

Что касается до извлеченія квадратнаго корня изъ первой части, то оно соспоитъ въ слѣдующемъ: извлеки корень изъ квадрата неизвѣстнаго количества, попомъ изъ квадрата прибавленнаго; сей второй корень соедини съ первымъ такимъ знакомъ, какой будетъ находиться во второмъ членѣ уравненія.

На примѣрѣ, въ уравненіи $x^2 + 6x = 16$, беру половину изъ извѣстнаго количества 6, умножающаго x во второмъ членѣ: дѣлаю изъ сей половины квадрати и прибавляю квадрати 9 къ обѣмъ частямъ экваціи, отъ чего происходитъ $x^2 + 6x + 9 = 25$. По томъ извлекая квадратной корень изъ x^2 , нахожу x , изъ 9 нахожу 3; а какъ второй членъ уравненія $6x$ есть положительной, то заключаю, что $x + 3$ долженъ быть квадратной корень первой части; чтожъ касается до второго члена, то онъ будетъ 5, или $(83) \pm 5$; слѣд. $x + 3 = \pm 5$. Наконецъ для опредѣленія x надлежитъ здѣлать обыкновенную переноску членамъ; послѣ чего получу $x = \pm 5 - 3$, то есть, такое уравненіе, въ которомъ x имѣетъ двѣ величины, именно: $x = + 5 - 3 = 2$, и $x = - 5 - 3 = - 8$. Послѣ увидимъ, что значить вторая величина.

Чтобъ понять причину сего правила, то надлежитъ припомнить замѣчаніе (25), въ

силу котораго квадратъ двучленнаго корня состоитъ всегда изъ квадрата перваго члена, изъ удвоеннаго произведенія перваго члена на второй, и изъ квадрата втораго члена.

По предположеніи сего, естли попребуемъ нужда прибавлять къ такому количеству, каково $x^2 + 6x$, то, čímъ можно здѣлать его совершеннымъ квадратомъ, то надлежитъ примѣчать: 1°. что количество сіе содержитъ уже квадратъ, именно x^2 , которой можно почитать за квадратъ первой части двучленнаго количества; 2°. что послѣдующій членъ $6x$ можно принимать всегда за удвоенное произведеніе x на второе количество; 3°. что сіе второе количество необходимо должно быть половина 6 множителя x . Слѣд. всякому легко примѣшавъ, что въ уравненіи $x^2 + 6x$ недостаетъ только квадрата втораго члена, то есть, квадрата половины множителя x во второмъ членѣ. Разсужденіе сіе относится вообще ко всѣмъ экваціямъ второй степени, какой бы впрочемъ не былъ множитель члена x .

Что касается до предписаннаго правила для извлеченія квадратнаго корня изъ первой части уравненія, то оно можетъ служить послѣдствіемъ, выходящимъ изъ составленія

квадрата. Поелику два крайніе квадрата, содержащіяся въ цѣломъ квадратѣ двучленнаго корня, представляютъ квадраты обоихъ членовъ; по нѣмъ нимаго сумиѣнія, что для опредѣленія ихъ стоитъ только извлечь корни по одиначкѣ изъ каждого квадрата. Но для чего поставляется второй членъ корня съ такимъ же знакомъ, какой находится во второмъ членѣ эквации, по этому научаемъ насъ сама выкладка; ибо квадратъ изъ $a + b$ есть $a^2 + 2ab + b^2$, а изъ $a - b$ квадратъ выходитъ $a^2 - 2ab + b^2$.

Примѣры на предыдущее Правило для рѣшенія нѣкоторыхъ Волросовъ второй степени.

88. Какой бы степени не было уравненіе, надлежитъ однакожъ, выводъ его изъ вопроса, употреблять всегда предписанное (60) правило.

Вопросъ I. Найти такое число, котораго бы квадратъ, сложенный съ тѣмъ же числомъ, давшимъ 8 разъ, составилъ 33?

Еслили мнѣ извѣстно будетъ число сіе, которое положимъ x , то взявши квадратъ его x^2 и сложивши оной съ тѣмъ же числомъ, умноженнымъ на 8, то есть съ $8x$, получу въ суммѣ $x^2 + 8x$ по, что должно составлять 33; слѣд. заключаю, что $x^2 + 8x = 33$.

Для рѣшенія сего уравненія прибавляю къ каждой части его по 16, то есть, по квадрату половины числа 8, умножающаго x во второй членѣ, и получаю $x^2 + 8x + 16 = 49$ уравненіе, въ которомъ первая часть сдѣланная совершеннымъ квадратомъ. Извлекаю квадратный корень изъ каждой части по правилу (87), и нахожу $x + 4 = \pm 7$; слѣд. $x = \pm 7 - 4$, а по сему заключаю, что x имѣетъ двѣ величины, то есть, $x = 7 - 4 = 3$, и $x = -7 - 4 = -11$.

Первая изъ найденныхъ двухъ величинъ разрѣшаемъ вопросъ, потому что 9 квадратъ изъ 3, съ 3×8 или 24, составляетъ точно 33. Числожъ принадлежитъ до второй, то она, какъ отрицательная, показывается, что долженъ быть другой вопросъ такой, въ которомъ взявши x въ противномъ смыслѣ, рѣшеніе должно состоять изъ 11; то есть, вторая величина x должна означать въ сходствеиности такого другаго вопроса: *Найти число, котораго бы квадратъ безъ тогожъ числа, взятаго 8 разъ, состоялъ изъ 33?* Что будетъ и справедливо; ибо квадратъ изъ 11 есть 121, и 11, умноженное на 8, даетъ въ произведеніи 88; разность между сими двумя числами выходитъ дѣйствительно 33.

Дабы утвердить сказанное (62) объ отрицательныхъ количествахъ, замѣнимъ, что второй вопросъ, представленный въ уравненіи, будетъ $x^2 - 8x = 33$; а разрѣшивъ сію квадратъ по предписанному правилу, найдемъ $x = \pm 7 + 4$, то есть, такія двѣ величины $x = 11$ и $x = -3$, которыя совсѣмъ противны предыдущимъ.

89. Явствуетъ изъ сказаннаго, что уравненіе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ всегда два рѣшенія.

Ибо найденныя двѣ величины 11 и -3 , поставлены будучи на мѣсто x въ уравненіи $x^2 - 8x = 33$, разрѣшаютъ его одинаково, то есть, первая часть уравненія сего будетъ въ обоихъ случаяхъ состоять

изъ 33. Въ разсужденіи 11 мы выше увѣрились; чтожъ касается до — 3, то квадратъ его есть + 9, и произведеніе — 3 на 8 состоятъ изъ — 24; но сіе послѣднее число, будучи вычтено изъ + 9 по показанному (11) правилу, даешь въ остатокъ + 9 + 24, или 33.

Хотя всякая эквація второй степени имѣетъ два рѣшенія; однако не должно заключать изъ сего, чтобъ вопросъ, изъ котораго выводится она, могъ рѣшиться также двоякимъ образомъ.

Ибо въ настоящемъ случаѣ вторая величина — 3 разрѣшается уже не другою вопросомъ, но совсѣмъ противоположной ему. Впрочемъ случается не рѣдко, что оба рѣшенія, здѣланные для уравненія, служатъ также и для вопроса. Доказательство на это здѣлаемъ въ прѣдѣльномъ вопросѣ.

Вопросъ II. Надлежало раздѣлить 175 рублей между нѣкоторымъ числомъ людей; но какъ двое изъ нихъ находились въ отлучкѣ, и слѣд. не могли получить своей части, то часть каждого изъ получившихъ усугубилась по сему обстоятельству 10 рублями. Спрашивается, сколько естъ человекъ было и съ отсутствующими?

Еслили мнѣ извѣстно будетъ число людей, то раздѣливъ 175 на сіе число, узнаю сколь велика должна быть часть каждого человека, когда бы они все находились налицо. По томъ раздѣливъ опять 175 на то же число, уменьшенное двумя, узнаю настоящую часть каждого получившаго. Наконецъ уменьшивъ второе частіе 10 рублями, я долженъ получить остатокъ равный первому частію. Станемъ поступать по сему разсужденію, предпавивъ чрезъ x искомое число.

Еслилибѣ все люди были на лицо, то часть каждаго должна соспоянь изъ $\frac{175}{x}$; но какъ двухъ нѣшѣ, то часть каждаго получившаго будетъ $\frac{175}{x-2}$; при томъ же послѣднее число сіе по положенію то больше перваго, слѣд. $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Для рѣшенія сей экваціи, уничтожаю знаменатели, и по замѣчанію (59) пишу $175x - 10(x-2) = 175 \times (x-2)$; по томъ произвожу показанныя дѣйствія и нахожу $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$, или $10xx - 20x = 350$; наконецъ раздѣливъ на 10, вывожу $xx - 2x = 35$ такое уравненіе, въ которомъ спония только употребленъ предписанное правило (87). И такъ взявъ половину — 1 изъ множителя — 2 втораго члена x , прибавляю квадрати сей половины $+ 1$ къ обѣимъ частямъ уравненія, послѣ чего оно превращается въ $x^2 - 2x + 1 = 36$; извлекаю квадратной корень, и нахожу $x - 1 = \pm 6$; слѣд $x = \pm 6 + 1$, то есть, $x = 7$ и $x = -5$. Первая величина x будетъ пребуемая, потому что 175, раздѣленное на 7, даетъ 25, и 175, раздѣленное на $7 - 2$ или на 5, равно 35 числу, которое превосходитъ 25 десятию. Чтожъ касается до второй, то она разрѣшаетъ другой вопросъ такой, которымъ предлагается раздѣлить 175 руб. съ двумя лишними челѣвками; и слѣд. въ такомъ случаѣ часть каждаго должна уменьшиться 10 рублями.

Вопросъ III. *Нѣкто купилъ лошадь, и по нѣкоторомъ времени продалъ ее за 24 рубль. При сей продажѣ онъ потерялъ на 100 столько, чего стоила ему лошадь. Спрашивается, за сколько купилъ ее самъ продавецъ?*

Еслили мнѣ будетъ извѣстно, чего стоила лошадь, то повѣрю такъ. Вычту цѣну сію изъ 100, и здѣлаю слѣдующую посылку: какъ 100 содержится въ найденному остатку, такъ искома цѣна въ 24. Представимъ искомое число чрезъ x , и пропорція изо-

бразится чрезъ 100 : 100 — $x \equiv x : 24$; слѣд. . . .
 $\frac{100x - xx}{100} \equiv 24.$

Для рѣшенія сей экваціи уничтожаю знаменателя, и получаю $100x - xx \equiv 2400$, или по перемѣнѣ знаковъ $xx - 100x \equiv -2400$. Взявши половину (87) изъ — 100, что есть, — 50, прибавлю квадратъ его + 2500 къ каждой части, опъ чего уравненіе перемѣнится въ $x^2 - 100x + 2500 \equiv 100$; извлеку квадратной корень, и найду $x - 50 \equiv \pm 10$; слѣд. $x \equiv \pm 10 + 50$, и имѣемъ двѣ величины $x \equiv 60$, и $x \equiv 40$, изъ которыхъ каждая рѣшилъ данной вопросъ. Такии образомъ цѣна лошади можетъ равно состоятъ изъ 60 или 40 рублей; ибо ничто не опредѣляетъ здѣсь, какая больше приличесивуетъ вопросу. Повѣряя найдемъ для 60, что $100 : 40 \equiv 60 : 24$; а для 40, $100 : 60 \equiv 40 : 24$.

90. Въ предыдущихъ вопросахъ каждое уравненіе состояло изъ двухъ рѣшеній, именно, изъ одного положительнаго, а другаго отрицательнаго. Въ послѣднемъ оно имѣетъ два положительныхъ, и можетъ состоятъ также изъ двухъ отрицательныхъ. Но сіе случается тогда только, когда вопросъ данъ не исправно; ибо въ такомъ случаѣ каждое отрицательное рѣшеніе покажетъ (62), что неизвѣстное должно быть взято въ прошивномъ смыслѣ и не въ силу вопроса.

На примѣръ, еслии будетъ данъ слѣдующій вопросъ: *Найти такое число, котораго бы квадратъ, сложенный съ тѣмъ же числомъ, взятымъ 9 разъ и еще съ 50, далъ въ суммѣ 30?*

То предсавивъ данной вопросъ въ экваціи, получу $x^2 + 9x + 50 \equiv 30$; уравненіе сіе по изъяснен-

чимъ выше правиламъ перемѣнился въ $x^2 + 9x =$
 -20 , потомъ въ $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$;
 по извлеченіи квадратнаго корня $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, и
 слѣд. $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, и $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}$

$= -5$. Величины сіи показываютъ, что вопросъ
 долженъ перемѣниться въ слѣдующій другой: *Най-
 ти число, котораго естли къ квадрату прибавиши
 50, и потомъ изъ суммы вычтешь тоже число, взя-
 тое 9 разъ, то въ остаткѣ должно выйти 30?*

91 Алгебра имѣетъ не только то пре-
 имущество, что разрѣшаетъ вопросы, но и
 еще показываетъ, исправно ли оныя даны и
 естли возможность ихъ рѣшить. Замѣчаніе
 на сіе здѣлано было (85).

А чинобъ увѣриться на самомъ дѣлѣ, то пере-
 рѣши преній вопросъ, положивъ вмѣсто 24 рублей

26. Уравненіе въ такомъ случаѣ будетъ $\frac{100x - xx}{100} =$

26, или $100x - xx = 2600$, или $xx + 100x = -2600$,
 которае по правилу (87) перемѣнился въ $xx - 100x$
 $+ 2500 = -2600 + 2500 = -100$; по извлеченіи
 квадратнаго корня въ $x - 50 = \pm \sqrt{-100}$ и нако-
 нецъ въ $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; но мы видѣли (85), что
 не можно извлечь квадратнаго корня изъ отрицатель-
 наго количества.

Вопросъ IV. Два товарища положили въ торгъ по
 нѣкоторому капиталу: первый 300 рублей на 17 мѣсяцовъ,
 второй, спустя 5 мѣсяцовъ послѣ, неизвѣстную сумму,
 и слѣд. сумма торого была въ торгу только 12 мѣсяцовъ
 или одинъ годъ. По здѣланномъ между ими расчетѣ, ка-
 питаль втораго съ барышомъ обратился въ 260 руб. об-
 щій барышъ состоялъ изъ 187 $\frac{1}{2}$ рублей. Спрашивается,
 какую сумму положилъ второй, и какъ великъ ба-
 рышъ каждого?

Для рѣшенія сего вопроса стоитъ только узнать сумму положенныхъ денегъ въпорымъ товарищемъ; ибо сыскавши ее, не трудно послѣ опредѣлить барышъ каждаго. Представимъ сумму сию или число рубле, отданныхъ въ шоргъ въпорымъ товарищемъ чрезъ x . А какъ 300 рублей положены первымъ на 17 мѣсяцовъ, то они должны принести барыша столько, сколько 300 руб. взявшие 17 разъ, или 5100 руб. могутъ принести въ одинъ мѣсяцъ.

Равнымъ образомъ капиталъ въпорого, послѣ отданъ на 12 мѣсяцовъ, долженъ принести столько, сколько могутъ принести 12 x рублей въ одинъ мѣсяцъ. И такъ можно по допущеніи сего почитать, что шоргъ продолжался одинъ только мѣсяцъ, принимая за капиталы 5100 и 12 x ; и слѣд. для опредѣленія барыша въпорого товарища, надлежитъ (Ариф. 187) найти четвертой членъ въ слѣдующей пропорціи $5100 + 12x : 187 \frac{1}{2} = 12x$:

Сей четвертой членъ будетъ $\frac{12x \times 187 \frac{1}{2}}{5100 + 12x}$, или

$\frac{2250x}{5100 + 12x}$; но въ силу вопроса барышъ въпорого товарища съ капиталомъ его x долженъ состоять изъ 260 рублей; слѣд. $\frac{2250x}{5100 + 12x} + x = 260$.

Для рѣшенія сей экваціи уничтожато знаменателя, и получаю $2250x + x(5100 + 12x) = 260(5100 + 12x)$, или по совершеніи показанныхъ умноженій $2250x + 5100x + 12xx = 1326000 + 3120x$; по перенесеніи членовъ и по приведеніи $12x + 4230x = 1326000$; по раздѣленіи всѣхъ членовъ на 12, $x^2 + \frac{4230}{12} x = \frac{1326000}{12}$, или $x^2 + \frac{705}{2} x = 110500$; по томъ взявши половину изъ $\frac{705}{2}$, которая будетъ $\frac{705}{4}$, составивъ изъ сей половины квадратъ и прибавивъ оной къ обѣ-

имѣ частіямъ уравненія, выведу $x^2 + \frac{705}{2}x + \dots$

$$\frac{497025}{16} = 110500 + \frac{497025}{16} = \frac{2265025}{16}. \text{ Наконецъ по}$$

извлеченіи квадратнаго корня, найду $x + \frac{705}{4} = ..$

$$\pm \sqrt{\frac{2265025}{16}} = \pm \frac{1505}{4}; \text{ слѣд. } x = -\frac{705}{4} \pm \frac{1505}{4}.$$

По сему уравненію заключаю, что одна только величина можетъ приличеслованъ вопросу, именно $x =$

$$-\frac{705}{4} + \frac{1505}{4} = \frac{800}{4} = 200; \text{ и слѣд. капиталъ впо-}$$

раго шовариша состоитъ изъ 200 рублей, барышъ его изъ 60, а барышъ перваго изъ $127\frac{1}{2}$.

92. Правило для литеральныхъ уравненій служитъ поже.

Еслили будетъ дано рѣшить слѣдующую эквацію $abx - ax^2 = b^2c$, то въ сходственності (86 и 87) превращу ее въ $axx - abx = -b^2c$, по томъ въ $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; прибавлю къ каждой части сего

последняго уравненія по квадрату изъ $-\frac{b}{2}$, то есть,

$$\text{по } +\frac{bb}{4} \text{ и получу } xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}; \text{ из-}$$

влеку квадратной корень, и найду $x - \frac{b}{2} = \dots$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}, \text{ наконецъ } x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}.$$

93. Когда литеральное уравненіе будетъ состоять изъ многихъ членовъ, то

можно приводить его въ трехчленное слѣдующимъ образомъ.

Пусть данное уравненіе будетъ такое $ax^2 + bxc - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Переносу въ одну часть всѣ члены съ x , и пишу рядомъ всѣ нѣ, которые находясь въ одной степени, изъ чего получится $ax^2 - bx^2 + bxc + acx = a^2b - ab^2$. Теперь примѣчаю, что $ax^2 - bx^2$ представляется поже, что $(a - b) \times x^2$ или $(a - b) x^2$, равномѣрно $bxc + acx$ представляется поже, что $(bc + ac) x$; такимъ образомъ въ уравненіи $ax^2 - bx^2 + bxc + acx = a^2b - ab^2$ можемъ перемѣниться въ слѣдующую $(a - b) x^2 + (bc + ac) x = a^2b - ab^2$. Но какъ количества a, b, c имѣютъ нѣны, то должно починать за извѣстныя и въ количества $a - b, bc + ac$ и $a^2b - ab^2$; слѣд. для сокращенія можно каждое изъ нихъ представлять одною буквою, положивъ $a - b = m, bc + ac = n, a^2b - ab^2 = p$, послѣ чего эквація приведена будетъ въ такой видъ $mx^2 + nx = p$, въ какомъ раземантривали мы предыдущія; слѣд. разрѣшая ее, получимъ напередъ $x^2 + \frac{n}{m} x = \frac{p}{m}$, по томъ $x^2 + \frac{n}{m} x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$ (чрезъ прибавленіе квадрата изъ половины $\frac{n}{m}$, то есть, изъ $\frac{n}{2m}$); по извлеченіи квадратнаго корня $x + \frac{n}{2m} = \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; и наконецъ $x = -\frac{n}{2m} \pm \dots \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$.

94. Впрочемъ такія перемѣны дѣлаются только въ однихъ весьма сложныхъ или въ зблчивыхъ выкладкахъ; чтожъ касается до непродныхъ, то можно и безъ нихъ обойтись; на примѣръ, въ предыдущемъ случаѣ, по представленіи данной экваціи въ видъ $(a - b) x^2 + (bc + ac) x = a^2b - ab^2$, можно трактовать ее, какъ и прежнія, безъ большой выкладки, раздѣливъ всѣ члены на $a - b$; онѣ

чего произойдетъ $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b} x = \frac{a^2b - ab^2}{a - b}$; по
 томъ прибавивъ къ каждой части по квадра-
 ту половины $\frac{bc + ac}{a - b}$, то есть, по квадрату изъ
 $\frac{bc + ac}{2a - 2b}$; но можно, не составляя сего квадрата, при-
 бавивъ его въ одномъ показаніи, именно, въ такомъ
 видѣ $\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2$; и слѣд. по прибавленіи сего
 квадрата уравненіе превратится въ $x^2 + \dots$
 $\frac{bc + ac}{a - b} x + \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 = \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \dots$
 $\frac{a^2b - ab^2}{a - b}$, по извлеченіи квадратнаго корня въ $x +$
 $\frac{bc + ac}{2a - 2b} = \pm \sqrt{\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}}$, и на-
 конецъ въ $x = -\frac{bc + ac}{2a - 2b} \pm \sqrt{\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \dots}$
 $\frac{a^2b - ab^2}{a - b}]$.

*О составленіи Степеней изъ одночленныхъ
 количествъ, о извлеченіи Корней ихъ, и
 о представленіи Радикальныхъ зна-
 ковъ и Показателей.*

95. Сказано выше, что *степенью* ко-
 личества называются произведенія того же
 количества, помноженного на самого себя
 нѣсколько разъ. a^3 есть третья степень
 или кубъ количества a , потому что a^3 вы-
 ходитъ изъ $a \times a \times a$. Умножаемое количе-
 ство бываетъ столько разъ производителемъ

или факторомъ въ степени, сколько находится единицъ въ показателѣ той степени.

На примѣръ въ a^5 , a находится пять разъ производимель, а въ $(a+b)^5$, $a+b$ есть шесть разъ.

96. Поелику для умноженія одночленныхъ или перальныхъ количествъ съ показателями должно (20) сложить показателя каждой множимой буквы съ показателемъ каждой подобной буквы множителя; то слѣдуетъ изъ сего, что для возведенія въ какую нибудь степень одночленного количества, надлежитъ умножить настоящаго показателя каждой буквы на число, означающее, въ какую степень требуется возвести данное количество. Назовемъ число сіе показателемъ степени.

Такимъ образомъ для составленія изъ a^2b^3c четвертой степени, напишу $a^8b^{12}c^4$, умноживъ показатели 2, 3 и 1 количествъ a , b , c на показателя 4 степени, въ которую требуется возвести a^2b^3c . Ибо для составленія изъ a^2b^3c четвертой степени, надлежитъ умножить a^2b^3c на a^2b^3c , по томъ произведение на a^2b^3c , второе произведение опять на a^2b^3c ; но для совершенія сихъ умноженій должно (20) сложить показатели; при томъ же, какъ показатели сии остаются также въ каждомъ производимель, то должно сложить каждого показателя при разѣ съ самимъ собою, но есть, умножить его на 4. Разсужденіе сіе служитъ для всякой другой степени одночленного количества.

Когда случится производить съ показателями количествъ разсужденія или дѣйствія,

не зависящія отъ особенныхъ извѣстныхъ величинъ тѣхъ показателей, но отъ такихъ, которыя служатъ вообще для показателей всякаго рода; тогда изображаются сіи показатели буквами.

На примѣрѣ, для возведенія всякаго количества $a^m b^n c^p$ въ какую нибудь степень, вообще изображенную чрезъ r , должно написать $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

97. Если количество, возвышаемое въ данную степень, будетъ дробь, то должно составить степень сію какъ изъ числителя, такъ и знаменателя.

На примѣрѣ $\frac{a^2 b^3}{cd^2}$, возведенное въ пятую степень, изобразится чрезъ $\frac{a^{10} b^{15}}{c^5 d^{10}}$; равномѣрно для составленія изъ $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ степени r , должно написать $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

98. Если при количествѣ будетъ находиться коэффициентъ, то должно составить изъ него также требуемую степень, умноживъ его на самого себя по правиламъ Арифметики.

На примѣрѣ изъ $4 a^3 b^2$, пятая степень будетъ $1024 a^{15} b^{10}$.

Иногда при такомъ составленіи довольно одного показанія, какъ и въ буквахъ.

И для того можно написать $4^5 a^{15} b^{10}$.

99. Что касается до знаковъ, то въ стѣхъ степеняхъ, имѣющихъ парнаго показателя, ставится знакъ $+$; но въ степеняхъ съ нечетнымъ показателемъ ставится или $+$ или $-$, глядя по составляемому количеству, съ какимъ знакомъ оно находится съ $+$ или $-$. Истинна сего выводится непосредственно изъ предписаннаго (24) для знаковъ правила.

100. Слѣдуетъ изъ всего сказаннаго теперь, что показатель каждой буквы во всякой степени содержишь въ себѣ показателя своего корня или радикаса столько, сколько находится единицъ въ показателѣ трактующей степени; на пр. въ четвертой степени показатель каждой буквы въ четверо будетъ больше того, какой былъ въ коренномъ количествѣ.

101. И такъ, чтобъ извлечь корень данной степени изъ всякаго одночленнаго количества, должно раздѣлить показателя каждой сего буквы на число изъ

влекаемой степени. Число сіе называется показателемъ корня.

На примѣръ, для извлеченія третьяго или кубическаго корня изъ $a^{12}b^6c^3$ раздѣлю показателя каждой буквы на 3, и вышшу a^4b^2c . Равномерно для извлеченія пятаго корня $a^{20}b^{15}c^5$ раздѣлю каждого показателя на 5, отъ чего выйдетъ a^4b^3c . И вообще для извлеченія корня степени r изъ количества $a^m b^n$ должно написать $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

102. Знакъ въ корнѣ четной степени поставляется $+$ или $-$ произвольно; но въ нечетной степени корень сохраняетъ знакъ самаго количества.

Такимъ образомъ квадратной корень изъ a^6b^4 будетъ $+$ a^3b^2 ; корень пятой степени изъ $-a^5b^{10}$ будетъ $-ab^2$.

103. Когда извлекаемое количество будетъ дробь, тогда извлекается корень порознь изъ числителя и изъ знаменателя.

104. Когда будутъ при количествахъ коэффициенты, то квадратной или кубической корень извлекается изъ нихъ по правиламъ Арифметики, а прочихъ вышнихъ степеней по показаннымъ ниже.

105. Когда показатель извлекаемаго корня не дѣлится наравно каждого показателя даннаго количества, то это знакъ, что ко-

личество не представляеть совершенной степени. Въ такомъ случаѣ показатель остается дробнымъ.

На примѣрѣ, желая извлечь кубической корень изъ $a^9 b^3 c^4$, пишу $a^3 b c^{\frac{4}{3}}$, или $a^3 b c c^{\frac{1}{3}}$, гдѣ показатель $\frac{1}{3}$ значитъ, что остается еще извлечь кубической корень изъ количества c .

106. Извлеченія корней вышнихъ степеней изображаются тѣмъ же знакомъ $\sqrt{}$; только въ отверстіи его полагается число, означающее степень извлекаемаго корня.

На примѣрѣ $\sqrt[3]{a}$ показывается кубической корень изъ a ; $\sqrt[7]{a}$ значитъ седьмой корень изъ a ; слѣд. должно починать сѣи два изображенія $\sqrt[3]{a}$ и $a^{\frac{1}{3}}$ за одно; равнымъ образомъ $\sqrt[3]{a^4}$ и $a^{\frac{4}{3}}$ должно починать одинаковыми количествами.

107. По сдѣланному (105) замѣчанію можно приводить въ простѣйшее значеніе радикальныя количества, или тѣ, при которыхъ находится знакъ $\sqrt{}$.

На примѣрѣ, если дано будетъ $\sqrt[3]{a^4 b^5}$, то какъ сѣ количество равно $a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}}$ или $a a^{\frac{1}{3}} b b^{\frac{2}{3}}$, изъ которыхъ послѣднее изображеніе значитъ тоже (105).

что $ab \sqrt[3]{ab^2}$; слѣд. можно заключить, что $\sqrt[3]{a^4 b^5} = ab \sqrt[3]{ab^2}$.

Равномѣрно $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a \frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a \sqrt{\frac{a}{f}}$;
а по умноженіи числителя и знаменателя на \sqrt{f} , произойдетъ $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \sqrt{\frac{a^3 f}{f^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{f} a^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{f} \sqrt{af}$.

108. Если случится коэффициентъ, не представляющій совершенной степени, то должно раздроблять его на факторы, изъ которыхъ бы одинъ представлялъ совершенную степень извлекаемаго корня; попомъ производить дѣйствіе, какъ показано въ предыдущихъ примѣрахъ.

На примѣрѣ данное количество $\sqrt[3]{48 a^2 b^3}$ можно перемѣнить на $\sqrt[3]{3 \times 16 a^2 b^3}$, или $\sqrt[3]{3 \times 4^2 a^2 b^3}$, а сіе на $4ab \sqrt[3]{3b}$. Равномѣрно $\sqrt[3]{81 a^5 b^4} = \sqrt[3]{3 \times 27 a^5 b^4} = 3ab \sqrt[3]{3a^2 b}$.

109. При извлеченіи даннаго корня изъ разнороднаго количества, не должно дѣлиту cadaго показателя его, но почитать всѣ части его за одно количество, которому показателемъ служить 1; сія единица дѣлится на показателя извлекаемаго корня, что собственно производится однимъ показаніемъ.

На примѣрѣ вмѣсто количества $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$, представляющаго ничто другое, какъ $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^1}$, пишется $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}}$ или $\overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Если количество, находящееся съ радикаломъ, будетъ имѣть при томъ показателя, то должно сего показателя раздѣлить на показателя извлекаемой степени,

На примѣрѣ въ мѣсто $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}$ можно написать $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$.

110. Если радикальныя количества бываютъ не подобны, то сложение и вычитание ихъ производится чрезъ соединеніе знаками; когдажъ они подобны, то коэффициенты ихъ складываются или вычитаются обыкновеннымъ образомъ.

На примѣрѣ для сложения $\sqrt[3]{a}$ съ $\sqrt[4]{b}$, должно написать $\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}$. Для вычитанія $7a\sqrt[3]{b}$ изъ $9a\sqrt[3]{b}$ напиши $2a\sqrt[3]{b}$.

111. Для умноженія или дѣленія радикальныхъ количествъ одной степени производи дѣйствіе, какъ бы не было радикала; и потомъ въ произведеніи или въ частномъ поставь томъ же радикалъ.

На примѣръ $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a \sqrt[7]{a}$;
 $\sqrt[5]{a^2 b^3} \times \sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{a^5 b^5} = ab$; $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \dots$
 $\sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}$.

Равномѣрно $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{b} = \sqrt{(-ab)}$; и $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{(-a \times -b)} = -\sqrt{(ab)}$.

Для послѣдняго сего примѣра нужно изъясненіе: казалось бы, что $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)}$ должно по правилу дать $\sqrt{(-a \times -b)}$ или $\sqrt{(+ab)}$ или \sqrt{ab} ; а какъ приметъ всякой корень четной степени имѣетъ (102) двойной знакъ \pm , то слѣдовало бы написать $\pm \sqrt{ab}$; но надлежитъ примѣтитъ здѣсь, что $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a} \sqrt{(-1)}$, и $\sqrt{(-b)} = \sqrt{b} \sqrt{(-1)}$: слѣд. $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{a} \sqrt{-1} \sqrt{b} \sqrt{-1} = \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{(-1)} \sqrt{(-1)} = \sqrt{ab} \sqrt{(-1)^2}$; однакожъ $\sqrt{(-1)^2}$ различествуетъ отъ ± 1 ; потому что настоящее свойство знака — въ $\sqrt{(-1)^2}$ показываетъ, по какому дѣйствию произошелъ квадратъ $(-1)^2$, изъ котораго должно извлекать корень.

112. Для раздѣленія $\sqrt[7]{a^5}$ на $\sqrt[7]{a^3}$, должно раздѣлить a^5 на a^3 , и поставимъ предъ частнымъ a^2 радикалъ $\sqrt[7]{}$; отъ чего произойдетъ $\sqrt[7]{a^2}$.

Равномѣрно $\frac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2}; \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} =$
 $\frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2}; \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} =$
 $\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}; \text{ ибо пятый корень изъ 1 есть 1. Во-}$

обще всякая степень и всякой корень изъ единицы есть единица.

113. Еслили потребуется возвести количество съ радикальнымъ знакомъ въ такую степень, которой показатель равенъ показателю радикала, то должно въ такомъ случаѣ уничтожить радикалъ; такимъ образомъ $(\sqrt[5]{a})^5 = a$; сие явствуетъ изъ того, что количество приводится чрезъ такое дѣйствіе въ первое свое состояніе.

Для возведенія одночленного количества съ радикальнымъ знакомъ въ какую нибудь степень, должно составить требуемую степень изъ каждого его фактора по предписанному (96) правилу.

На примѣръ количество $\sqrt[7]{a^2 b^3}$, возведенное въ четвертую степень, даетъ $\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$, а по приведеніи $ab \sqrt[7]{ab^5}$. Въ этомъ увѣришься можно еще и такъ: $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ есть тоже (106), что $a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$; слѣд. для

воспавленія изъ сего послѣдняго количества четвер-
той степени, надлежитъ умножить показателей
его на 4; отъ чего произойдетъ $a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = ab a^{\frac{1}{7}} b^{\frac{5}{7}}$
 $= ab \sqrt[7]{ab^5}$.

114. Для извлеченія всякаго корня изъ
количества съ радикальнымъ знакомъ, дол-
жно умножить радикальнаго показателя
на показателя новаго корня.

На примѣръ для извлеченія кубическаго корня
изъ $\sqrt[5]{a^4}$, напишу $\sqrt[15]{a^4}$, умноживъ 5 на 3. Ибо $\sqrt[5]{a^4}$
 $= a^{\frac{4}{5}}$; но (101) при извлеченіи претвораго корня изъ $a^{\frac{4}{5}}$,
надобно раздѣлить показатель его на 3, отъ чего про-
изойдетъ $a^{\frac{4}{15}}$ шже, что $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}$.

115. Когда данныя количества съ ра-
дикалами не будутъ въ одной степени, то
для произведенія надъ ними дѣйствій умно-
женія и дѣленія, надлежитъ приводить ихъ
къ одинакой степени, что здѣлай по слѣ-
дующему правилу.

*Еслили будутъ два радикальныхъ
количества, то умножь показателя
одного радикала на показателя друга-
го; произведеніе будетъ служить общимъ
показателемъ обоихъ радикаловъ; составь
потомъ изъ каждаго количества степень,*

которая означается показателемъ другаго радикала.

На примѣръ для приведенія къ одинакому радикалу двухъ количествъ $\sqrt[5]{a^3}$ и $\sqrt[7]{a^4}$, умножаю 5 на 7, и получаю 35 показателемъ новаго радикальнаго знака, которой будетъ $\sqrt[35]{a^3}$; сопоставляю изъ a^3 седьмую степень, и изъ a^4 пятую, отъ чего выходинъ a^{21} и a^{20} : такимъ образомъ данныя количества перемѣнялись въ $\sqrt[35]{a^{21}}$ и $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Когда же будетъ находится болше двухъ радикальныхъ количествъ, то должно умножить между собою показатели всѣхъ радикаловъ, и произведеніе ихъ почитать общимъ показателемъ новаго радикала; потомъ составить изъ каждаго количества степень, означенную произведеніемъ радикальныхъ показателей, кромѣ умножаемаго.

Для приведенія къ одному радикалу данныхъ количествъ $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ и $\sqrt[8]{a^7}$, умножу трехъ показателей между собою 5, 7 и 8; отъ чего произойдетъ 280, общій показатель новыхъ радикальныхъ знаковъ; сопоставляю изъ a^3 7×8 или 56-тую степень, изъ a^2 5×8 или 40-ую, изъ a^7 5×7 или 35-тую; отъ чего произойдетъ $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

Въ справедливости правила сего можно увѣриться первымъ примѣромъ; ибо возводя a^3 въ седьмую степень, дѣлаемъ a семь разъ факторомъ болше прежняго. Но поелику

въ самое тоже время увеличиваемъ показателя радикальнаго знака въ семь разъ больше, то одно другимъ замѣняется безъ всякой перемѣны въ величинѣ.

116. Можно заключить изъ сего сужденія, что показатель количества и показатель радикала его могутъ имѣть общаго дѣлителя; и слѣд. такое количество можно представить иногда въ простѣйшемъ значеніи, раздѣливъ обоихъ показателей на общаго дѣлителя.

На примѣръ $\sqrt[12]{a^8}$ можетъ перемѣниться въ $\sqrt[3]{a^2}$ чрезъ раздѣленіе 12 и 8 на 4. Равномѣрно $\sqrt[4]{a^2}$ превращается въ $\sqrt[2]{a}$; $\sqrt[6]{a^3}$ превращается въ $\sqrt[2]{a}$.

117. Заключимъ еще, что въ количествахъ, имѣющихъ показателемъ извлекаемаго корня такое число, которое состоитъ изъ произведенія двухъ или многихъ чиселъ, можно здѣлать извлеченіе другимъ образомъ такъ.

Положимъ, что требуется извлечь шестой корень изъ a^{24} ; могу сначала извлечь квадратной корень, по томъ кубической, и получу шестой корень. Ибо $\sqrt[6]{a^{24}}$ превращается во первыхъ (116) въ $\sqrt[3]{a^{12}}$, по томъ въ $\sqrt[2]{a^4}$, или въ a^2 ; а сѣ равно произошло бы и тогда, когда бы извлеченъ былъ вдругъ шестой корень изъ a^{24} чрезъ раздѣленіе показателя 24 на 6.

Впрочемъ, поелику дробные показатели заступаютъ мѣсто радикаловъ, и какъ первые способнѣе употребляются въ изчисленіяхъ; то посудимъ еще о представленіи показателей.

Если дано будетъ умножишь $\sqrt[5]{a^3}$ на $\sqrt[5]{a^4}$, то перемѣню изображеніе сіе на слѣдующее другое $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, изъ котораго (20) произойдетъ $a^{\frac{7}{5}}$ или $aa^{\frac{2}{5}}$, или напоследокъ по приведеніи $a^5 \sqrt[5]{a^2}$. Для умноженія $\sqrt[5]{a^3}$ на $\sqrt[7]{a^4}$ напишу $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$, или $a^{\frac{3}{5}} + \frac{4}{7}$, а по приведеніи двухъ дробей къ одному знаменателю $a^{\frac{21+20}{35}}$ или $a^{\frac{41}{35}}$, что превращается въ $aa^{\frac{6}{35}}$, или наконецъ въ $a^{\frac{35}{35}} \sqrt[35]{a^6}$.

Вообще количество $\sqrt[n]{a^p} b^q \times \sqrt[r]{a^s} b^t$ перемѣняется въ $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$, а сіе въ $a^{\frac{n}{m} + \frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m} + \frac{s}{q}}$, или по приведеніи къ одному знаменателю въ $a^{\frac{qn+mr}{qm}}$ $b^{\frac{pq+ts}{qt}}$, напоследокъ (105) въ $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ts}}$. Тожъ происходитъ и въ дѣленіи; $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ перемѣняется въ $\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{5}}}$, или (31) въ $a^{\frac{2}{15}}$, или наконецъ въ $\sqrt[15]{a^2}$;

равномѣрно $\frac{\sqrt[5]{a^3} b^4}{\sqrt[7]{a^2} b^3}$ превращается въ $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = \dots$

$a^{\frac{3}{5}} = \frac{2}{7} \frac{4}{5} = \frac{2}{7}$, или по приведённой дроби къ одному знаменателю $a^{\frac{23}{35}} b^{\frac{10}{35}}$, по совершеніи вычитанія

выходитъ $a^{\frac{11}{35}} b^{\frac{13}{35}}$ одинакое изображеніе съ $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$.

Вообще
$$\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \frac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m} - \frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m} - \frac{s}{q}} =$$

$$a^{\frac{qn - mr}{qm}} b^{\frac{pq - ms}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{qn - mr} b^{pq - ms}}$$

118. Въ послѣднемъ семъ примѣрѣ вычитали мы показателя каждой буквы знаменателя изъ показателя соотвѣтствующей буквы числителя. Предписанное (31) правило для дѣленія, кажется, не позволяетъ сего дѣлать, когда показатель числителя бываетъ меньше знаменателя; однако вообще можно дѣлать такое вычитаніе, только къ излишку надлежитъ приписывать знакъ —; въ Алгебрѣ всякая дробь можетъ превратиться въ цѣлое.

На примѣрѣ вмѣсто $\frac{a^7}{b^2}$ можно написать $a^3 b^{-2}$; ибо по свойству дѣленія дѣлитель уничтожаетъ въ дѣлимомъ всѣхъ своихъ произвоидителей; въ количествѣ $\frac{a^5}{a^2}$ равномъ a^3 , дѣлитель a^2 уничтожаетъ въ a^5 двухъ факторовъ равныхъ a . Равномѣрно въ количествѣ $\frac{a^3}{b^2}$, дѣлитель b^2 долженъ уничтожить въ a^3 двухъ факторовъ равныхъ b ; хотя же сии факторы находящаяся скрыты, со всѣмъ тѣмъ можно ихъ

представить: ибо a безъ сомнѣнiя содержи́тъ въ себѣ b нѣкоторое число разъ цѣлое или дробное, и пусть будетъ сiе число разъ равно m , тогда $a = mb$; слѣд. количество $\frac{a^3}{b^2}$ должно быть равно $\frac{m^3 b^3}{b^2}$ или по приведенiи $m^3 b$; но количество $a^3 b^{-2}$ въ такомъ случаѣ снѣзавшiйся равно $m^3 b^3 b^{-2}$, или (20) $m^3 b^{3-2}$, то есть $m^3 b$; слѣд. $\frac{a^3}{b^2}$ представляе́тъ то же, что $a^3 b^{-2}$.

И такъ вообще можно ставить всегда знаменателя съ числителемъ рядомъ въ видѣ фактора, только съ противнымъ знакомъ показателя его.

Почему вмѣсто $\frac{1}{a^3}$ можно написать $1 \times a^{-3}$, или просто a^{-3} ; вмѣсто $\frac{1}{a^m}$, можно написать a^{-m} .

Вмѣсто $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ можно поставить $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$;

вмѣсто $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$ можно написать $(a^3 + b^3) \times (a^2 - b^2)^{-1}$;

и слѣд. заключая по сему правилу количество . . .

$\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}}$ можно представить чрезъ $\frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}$;

или наконецъ чрезъ $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

119. И обратно въ количествѣ, состоящемъ изъ нѣкоторыхъ отрицательныхъ частей, отрицательныя части могутъ переимѣниться въ знаменателя съ положительными показателями.

На примѣръ вмѣсто $a^3 b^{-4}$ можно написать $\frac{a^3}{b^4}$;

вмѣсто a^{m-3} равнаго $a^m \times a^{-3}$, можно поставить $\frac{a^m}{a^3}$, и такъ и проч.

*О составленіи Степеней изъ разнородныхъ
или многочленныхъ количествъ, и
о извлеченіи Корней ихъ.*

120. По данному понятію о степеняхъ надлежитъ для возведенія многочленного количества въ требуемую степень, умножить его самого на себя столько разъ, сколько находится единицъ въ показателѣ той степени; но ограничиваясь на такомъ способѣ, принуждены будемъ дѣлать часто весьма продолжительныя выкладки для полученія желаемыхъ результатовъ, которые можно сыскивать съ меньшимъ трудомъ, еслии рассмотримъ на свойства произведеній, которыя выходятъ изъ умноженій такого рода.

Займемся съ начала степенями двучленныхъ количествъ, потому что они могутъ руководствовать къ составленію степеней и изъ многочленныхъ; а дабы обнять и почувствовать силу всего того, о чемъ мы предлагать намѣрены, то повернемся нѣсколько назадъ, и рассмотримъ, какого свойства бывають произведенія, выводимыя изъ попе-

ремѣннаго умноженія нѣсколькихъ двучленныхъ факторовъ, изъ коихъ всѣ одинъ членъ имѣютъ общій; такое изслѣдованіе можетъ привести насъ прямо къ нашей цѣли, и снабдить нѣкоторыми предложеніями, весьма полезными впередъ.

121. Пусть будутъ $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ и проч. многія двучленные количества, имѣющія общимъ членомъ x , и которыя должно умножить между собою.

Изъ умноженія $x + a$

на $x + b$

выходитъ $x^2 + ax + ab + bx$

Изъ умноженія сего произведенія на $x + c$,
выходитъ

$x^3 + ax^2 + abx + abc + bx^2 + acx + cx^2 + bcx$

А по умноженіи сего втораго произведенія на $x + d$, выходитъ

$x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd + bx^3 + acx^2 + abdx + cx^3 + adx^2 + acdx + dx^3 + bcdx^2 + bcdx + cdx^2$

И такъ далѣе. Изъ сего можно вывести слѣдующія замѣчанія, что

1°. Въ каждомъ произведеніи остается первымъ членомъ количество x , возведенное въ такую степень, которая означается числомъ данныхъ двучленныхъ количествъ, такъ что ежели бы число ихъ было m , то первый членъ произведенія вышелъ бы x^m .

2°. Степени x начинаютъ уменьшаться единицею до послѣдняго члена, въ которомъ x не содержится болѣе.

3°. Множители каждой степени количества x (которые впередъ называть будемъ множителями тѣхъ членовъ, гдѣ заключающіяся степени) состоятъ во второмъ членѣ изъ суммы первыхъ членовъ a, b, c и проч. всѣхъ двучастныхъ количествъ; въ третьемъ изъ суммы произведеній тѣхъ же количествъ a, b, c и проч., умноженныхъ между собою по два; въ четвертомъ изъ суммы произведеній тѣхъ же количествъ a, b, c и проч. умноженныхъ по три, и такъ далѣе до послѣдняго члена, которой состоитъ изъ произведенія всѣхъ количествъ a, b, c и проч. Заключенія сіи неоспоримы и всегда одинаковы, какое бы не было число умноженныхъ количествъ $x + a, x + b$ и проч.

Часть III.

И

122. Если положимъ, что всѣ количества a, b, c и проч. равны между собою, то всѣ двучленные умножаемые будутъ равны также, и слѣд. найденныя выше произведенія будутъ послѣдовательныя степени изъ каждаго двучастнаго количества $x + a$; на пр. ежели положимъ, что каждое количество b, c, d и проч. будетъ равно a , и когда во всѣхъ произведеніяхъ, вмѣсто каждой буквы b, c, d и проч. поставимъ a , то слѣдующія произойдутъ результаты для величинъ степеней, означенныхъ по снорову.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$$

Отсюда видѣть можно, что если бы показатель составляемой степени былъ m , то всѣ послѣдовательныя степени количества x были бы $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}$, и проч.

Но не лзя съ такою очевидностію примѣнить того, какъ выходятъ коэффициенты разныхъ членовъ, и какая ихъ зависимость отъ показателя m , хотя они непременно должны зависеть отъ него: что мы теперь и станемъ разсматривать.

123. Дабы увѣриться, какимъ законамъ послѣдуютъ коэффициенты, возвратимся къ прежнимъ сысканнымъ нами произведеніямъ, и замѣшимъ, что множителъ втораго члена (когда всѣ количества a, b, c и проч. будутъ предположены равными a), долженъ состоятъ изъ a , взятаго столько разъ, сколько находится количествъ, потому что онъ состоитъ, какъ мы видѣли выше, изъ суммы сихъ количествъ; слѣд. когда число сихъ количествъ будетъ m , то множителъ втораго члена будетъ ma , то есть, коэффициентъ сего члена m будетъ равенъ показателю степени перваго члена. Сіе можно видѣть въ предложенныхъ ниже трехъ особенныхъ степеняхъ.

Посмотримъ теперь, какія должны происходить множители прочихъ членовъ. Является, что всѣ произведенія ab, ac, ad, bc, bd , и проч. должны быть въ настоящемъ предположеніи равны a^2 , равномерно abc, abd , и проч. должны быть по особенностямъ равны a^3 , и такъ далѣе. Слѣд. множителъ третьяго члена состоитъ изъ a^2 , взятаго столько разъ, сколько буквы a, b, c, d и проч. могутъ сдѣлать произведеній, умножены будучи по двѣ. Равномерно множителъ четвертаго члена состоитъ изъ a^3 , взятаго столько разъ, сколько могутъ

сдѣлать произведеній буквы a, b, c и проч.; умноженныя по три, и такъ далѣе; сдѣл. для сисканія въ числахъ коэффициента претѣяго, четвертаго и проч. членовъ въ степени m двучаснаго $x + a$, все дѣло состояишь въ томъ, чтобъ опредѣлить, какое число m буквъ a, b, c и проч. можешь сдѣлать разныхъ произведеній, когда буквы сіи будущъ умножены по двѣ, по три и проч.

124. Но замѣтимъ, что соединяя какое нибудь число m буквъ по двѣ, по три, по чешыре и проч. безъ повторенія одной и той же буквы во всякомъ совокупленіи, замѣтимъ, говорю я, что - - -

1^е. Число совокупленій по двѣ будетъ вдвое больше числа совершенно разныхъ произведеній. На примѣрѣ двѣ буквы a и b могутъ соединены бытъ между собою двоякимъ образомъ, то есть, ab и ba ; но оба сіи совокупленія не дѣлають двухъ разныхъ произведеній.

2^е. Число совокупленій многихъ буквъ по три будетъ въ шестеро больше числа разныхъ произведеній трехъ буквъ; ибо для соединенія трехъ количествъ a, b, c надлежитъ, по соединеніи двухъ какихъ нибудь, на примѣрѣ a и b , что сдѣлаетъ ab и ba ,

соединить послѣ шестью c съ каждымъ новымъ совокупленіемъ, то есть, расположить ее всячески съ буквами a и b , составившими ab и ba ; но отъ сего происходитъ шесть совокупленій, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго расположенія abc , acb , cab , bac , bca , cba , и припомъ всѣ сіи шесть соединеній составляютъ одно произведение.

Такимъ же образомъ увѣряемся, что четыре количества составляютъ дванцать четыре совокупленія, изъ которыхъ каждое дѣлаетъ одинакое произведение; слѣд. число разныхъ произведеній, выводимое изъ соединенія многихъ буквъ по четыре, будетъ составлять 24^{тую} часть всего числа совокупленій. Равнобрно число разныхъ произведеній изъ совокупленія многихъ буквъ по пяти, по шести, по семи и проч. будетъ составлять сто дванцатую, семь сотъ дванцатую, пять тысячъ сороковую и проч. часть цѣлаго числа совокупленій; то есть, вообще оно изображается дробью, которой числителемъ служитъ все число совокупленій, а знаменателемъ произведение всѣхъ чиселъ 1, 2, 3, 4 и проч., даже до того, которое показываетъ, изъ сколькихъ буквъ состоитъ каждое произведение.

125. Посмотримъ теперь, сколько совокупленій можеть сдѣлать всякое число m буквъ a, b, c и проч. соединенныхъ по двѣ, по три, и проч.

Что касается до соединенія буквъ по двѣ, то изъ предыдущаго явствуетъ, что одна буква не можеть соединиться съ собою, но соединяется съ числомъ $m - 1$ прочихъ буквъ, и слѣд. должна сдѣлать $m - 1$ совокупленій; а какъ находится всѣхъ буквъ число m , то онѣ должны сдѣлать m разъ $(m - 1)$, или $m \cdot (m - 1)$ соединеній. Слѣд. число разныхъ произведеній двухъ буквъ будетъ по объявленному (124) $m \cdot \frac{m - 1}{2}$.

Дабы получить число совокупленій m буквъ по три, надлежитъ каждое соединеніе ихъ по двѣ соединить съ каждою другою буквою, которая въ немъ не содержится, то есть, съ числомъ буквъ $m - 2$; слѣд. каждое сіе совокупленіе произведетъ $m - 2$ соединеній трехъ буквъ; а какъ находится $m \cdot (m - 1)$ совокупленій двухъ буквъ, изъ которыхъ каждое должно сдѣлать $m - 2$ соединеній по три буквы; слѣд. всѣхъ соединеній будетъ $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)$; но поелику число разныхъ произведеній (124) составляетъ шестую часть всего числа соеди-

неній; и потому оно будетъ $m \cdot \frac{(m-1) \cdot (m-2)}{6}$,

или $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$.

Такимъ же образомъ доказано будетъ, что число соединеній буквъ по четыре будетъ $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; ибо надлежитъ совокупить каждое соединеніе трехъ буквъ со всѣми прочими, которыя не заключаются въ немъ; а какъ число остальныхъ буквъ есть $m-3$, то для каждого соединенія трехъ буквъ произойдетъ $m-3$ новыхъ соединеній по четыре буквы; слѣд. изобразивъ число соединеній по три чрезъ $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$, получимъ за число совокупленій по четыре $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; а какъ число разныхъ произведеній четырехъ буквъ есть двѣнадцать четвертая часть всѣхъ соединеній; слѣд. оно должно состоять изъ $m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{(m-2)}{3} \cdot \frac{(m-3)}{4}$.

Равномѣрно число разныхъ произведеній, выводимое изъ умноженія числа m буквъ по пяти, по шести и проч. будетъ изображаться чрезъ $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$, чрезъ $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$, и такъ далѣе.

126. И такъ заключимъ изъ сего и изъ сказаннаго (122), что послѣдующіе члены двучаснаго количества $x + a$, возведеннаго въ степень m , или количества $(x + a)^m$ будутъ $x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} +$ и проч.

То есть, первой членъ строки, изображающей сію степень представляемъ первой членъ x двучаснаго количества, возведенный въ степень m ; потомъ показатели буквы x начинаютъ уменьшаться единицею, а показатели буквы a увеличиваться единицею со втораго члена, въ которомъ буква a появляется. Чтожь касается до коэффициентовъ m , $m \cdot \frac{m-1}{2}$, и проч., то должно замѣтить, что коэффициентъ втораго члена равенъ показателю перваго; коэффициентъ третьяго, именно $m \cdot \frac{m-1}{2}$ есть коэффициентъ m предыдущаго члена, умноженной на $\frac{m-1}{2}$, то есть, на половину показателя того же предыдущаго члена x . Равнобразно коэффициентъ четвертаго члена $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ происходитъ изъ коэффициента $m \cdot \frac{m-1}{2}$ предыдущаго члена, умноженнаго на $\frac{m-2}{3}$,

то есть, на предъ показателя того же предыдущаго члена x , и такъ далѣе. Всѣ сія заключенія, изъ одного разсмотрѣнія выведенныя, руководствуютъ къ слѣдующему общему правилу: *Коеффиціентъ всякаго члена находится умноженіемъ предыдущаго коеффиціента на показателя того же предыдущаго члена x , и раздѣленіемъ произведенія сего на число членовъ, предшествующихъ до искомаго.*

Составимъ для примѣра по этому правилу седьмую степень изъ $x + a$. Сія седьмая степень или $(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. Производя ее, должно по-составить сначала x^7 ; по немъ уменьшивъ показателя его единичною, умножить на 7 и на a ; оны чѣго произойдетъ $7ax^6$, второй членъ.

Сей второй членъ умножить на $\frac{6}{2}$, уменьшивъ показателя x единичною и увеличивъ его показателя a ; оны чѣго произойдетъ $21a^2x^5$, третій членъ.

Третій членъ умножить на $\frac{5}{3}$, уменьшивъ напередъ показателя x единичною, и увеличивъ его показателя a ; оны чѣго произойдетъ $35a^3x^4$, четвертый членъ, и такъ далѣе. Дѣйствіе кончится безъ всякаго труда.

Еслили потребуется составить какую нибудь степень не изъ $x + a$, но изъ $x - a$; въ такомъ случаѣ члены выведенной степени будутъ имѣть попеременно знаки $+$ и $-$,

считая съ перваго ; пошому что въ a^4 , знакъ не можетъ (24) переѣниться , хотя бы на мѣсто $+$ a поставлено было $- a$; но когда поставишь $- a$ въ нечетной степени , тогда знакъ переѣнится.

Показанная формула можетъ служить не только къ составленію требуемой степени изъ простого двучленного количества , какъ $x + a$, но и еще изъ двучленного сложнаго , на пр. $x^2 + a^2$, или $x^2 + a$, или $x^3 + a^3$ и проч. Также не только служитъ къ составленію степени , коей показатель будетъ цѣлое положительное число ; но и такой , которой показатель будетъ данъ положительной или отрицательной , цѣлой или дробной. Однакожъ для легчайшаго производства сихъ послѣднихъ составленій дадимъ формулъ другой видъ.

127. Возвратимся къ формулѣ $(x + a)^m =$
 $x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \dots$
 $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \text{и проч.}$

Если по изъясненному (119) можно поставить $\frac{x^m}{x}$ въ мѣсто x^{m-1} ; $\frac{x^m}{x^2}$ въ мѣсто x^{m-2} ; $\frac{x^m}{x^3}$ въ мѣсто x^{m-3} и проч. то въ сходствен-

ность сего правила можно переменить также предыдущую формулу въ слѣдующую

$$\text{Другую: } (x + a)^m = x^m + \frac{m a x^{m-1}}{1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2 x^{m-2}}{2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3 x^{m-3}}{3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4 x^{m-4}}{4}, \text{ и проч.}$$

А какъ всѣ члены въ послѣднемъ случаѣ имѣютъ общій факторъ x^m , то можно формулу переменить еще въ другую такую, $(x + a)^m = x^m \cdot (1 + \frac{m a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \text{и проч.})$, въ которой x^m служилъ множителемъ всему, что содержилося въ скобкахъ. Изъ сего выведемъ слѣдующее правило для способнѣшаго составленія порядка членовъ, долженствующихъ представить степень m двучаснаго $x + a$.

123. Поставь въ первой строкѣ слѣдующія количества :

$$m, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \quad \frac{m-4}{5} \text{ и проч.}$$

$$1 + m \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{a^4}{x^4} \text{ и проч.}$$

И написавъ внизу нѣсколько вѣдущихъ единицъ, сославляя порядокъ членовъ такимъ образомъ.

Умножь сію единицу на первой членъ верхней строки и на $\frac{a}{x}$; отъ чего произойдетъ второй членъ нижней строки или порядка.

Умножь сей второй членъ на второй членъ верхней строки и на $\frac{a}{x}$; отъ чего произойдетъ третій членъ послѣдней строки.

Умножь сей третій членъ на третій членъ верхней строки и на $\frac{a}{x}$; отъ чего выйдетъ четвертый членъ, и такъ далѣе.

Сложивъ всѣ сіи члены нижняго порядка, и умноживъ всю сумму на x^m , получишь величину $(x + a)^m$.

199. Еслили вмѣсто $x + a$ будетъ дано $x^2 + a^2$ или $x^3 + a^3$ или и проч., то на должно умножать послѣдовательно на $\frac{a}{x}$, но на $\frac{a^2}{x^2}$ въ первомъ случаѣ, на $\frac{a^3}{x^3}$ во второмъ, и вообще на второй членъ двучаснаго раздѣленія на первой; послѣ умножить сумму на x^2 возведенный въ степень m въ пер-

вомъ случаѣ, на x^3 возведенный въ степень m во впоромъ, то есть, вообще на первой членъ двучастнаго, возведенный въ искомую степень.

Напоследокъ естли второй членъ будетъ имѣть знакъ — вмѣсто +; въ такомъ случаѣ должно умножать последовашельно не на $\frac{a^1}{x}$ или $\frac{a^2}{x^2}$, но на $-\frac{a}{x}$ или $-\frac{a^2}{x^2}$ и проч.

Пусть для примѣра дано будетъ составить шестую степень изъ $x^3 + a^3$. Поступаю какъ слѣдуетъ.

$$1 + \overset{6}{\frac{6a^3}{x^3}} + \overset{\frac{5}{2}}{\frac{15a^6}{x^6}} + \overset{\frac{4}{3}}{\frac{20a^9}{x^9}} + \overset{\frac{3}{4}}{\frac{15a^{12}}{x^{12}}} + \overset{\frac{2}{5}}{\frac{6a^{15}}{x^{15}}} + \overset{\frac{1}{6}}{\frac{a^{18}}{x^{18}}}$$

То есть, написавъ въ строку 6, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$ и проч., что отвѣчаетъ m , $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$ и проч.; потомъ поставивъ внизу единицу на мѣстѣ перваго члена второй строки, умножаю сей первой членъ на первой членъ 6 верхней строки и на $\frac{a^3}{x^3}$; отъ чего выходинъ $\frac{6a^3}{x^3}$ второй членъ; умножаю $\frac{6a^3}{x^3}$ на второй членъ $\frac{5}{2}$ верхней строки и на $\frac{a^3}{x^3}$; отъ чего выходинъ $\frac{15a^6}{x^6}$ третій членъ, и такъ далѣе.

Напоследокъ умноживъ сумму членовъ, составленныхъ по такому закону, на x^3 возведенный въ шестую степень, то есть, (96) на x^{18} , найду, что

$$(x^3 + a^3)^6 = x^{18} + \frac{6a^3x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9x^{18}}{x^9} + \dots$$

$$+ \frac{15a^{12}x^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}x^{18}}{x^{18}}, \text{ или по приведеніи } \\ x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}.$$

130. Еслили потребуется составить степень не изъ двучаснаго количества, но изъ трехчаснаго, на примѣрѣ составить третью степень изъ $a + b + c$; въ такомъ случаѣ зѣлавъ $b + c = m$, составивъ изъ $a + m$ третью степень, которая по предписанымъ правиламъ выдѣлитъ $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Пошлѣ поставивъ на мѣсто m величину ея $b + c$, получимъ $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$; но какъ означенныя степени изъ $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ относяся къ степенямъ двучаснаго количества, то составивъ ихъ, какъ было показано выше, и умноживъ послѣ соотвѣтственно на $3a^2$, $3a$ и 1, получимъ по окончаніи выкладки, что $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

О извлеченіи Корней изъ разнородныхъ количествъ.

Узнавши находить члены всякой степени двучаснаго количества, не трудно вывести способъ извлекать корень требуемой степени изъ количества, которое въ буквахъ или въ числахъ будетъ дано; на пр. для извлеченія квадратнаго корня припомнимъ еще, что квадратъ двучаснаго количества состоитъ изъ квадрата перваго члена, изъ двойнаго произведенія того же перваго члена на второй, и изъ квадрата втораго члена. И такъ по расположеніи членовъ будемъ поступать, какъ ниже слѣдуетъ.

П Р И М Ъ Р Ъ . I.

$$\begin{array}{r}
 36a^2 + 60ab + 25b^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 6a + 5b \text{ корень} \\ 12a + 5b \end{array} \right. \\
 - 36a^2 \\
 \hline
 + 60ab + 25b^2 \\
 - 60ab - 25b^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ищу корень первого члена $36a^2$ и нахожу его $6a$, который пишу по спорону данного количества.

Составляю квадратъ изъ сего корня, и пишу $36a^2$ подъ первымъ членомъ съ знакомъ — для вычитанія. По приведеніи остается $+ 60ab + 25b^2$.

Подъ корнемъ $6a$ ставлю его же удвоеннаго $12a$. Дѣлю на $12a$ остаточную часть $60ab + 25b^2$, и въ частномъ нахожу $+ 5b$, которое пишу подлѣ корня $6a$, и получаю искомымъ корнемъ $6a + 5b$; но дабы увѣрившись въ истинности, ставлю частное $5b$ подлѣ $12a$, и умноживъ $12a + 5b$ на $5b$, подношу ссошвышсигенныя части произведенія подъ количество $60ab + 25b^2$ съ противоположными знаками; послѣ чего дѣлаю приведеніе, въ остатокъ не выходящій ничего, и для этого заключаю, что $6a + 5b$ есть настоящій квадратной корень изъ $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Возьмемъ для вѣрнѣе примѣра количество $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Расположивъ количество сіе по буквѣ a , получимъ квадратной его корень, какъ слѣдуетъ. . . .

П Р И М Ъ Р Ъ . II.

$$\begin{array}{r}
 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a - 3b + 4c \text{ кор.} \\ 4a - 3b \\ 4a - 6b + 4c \end{array} \right. \\
 - 4a^2 \\
 \hline
 1 \text{й ост.} - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 \quad + 12ab \quad \quad - 9b^2 \\
 \hline
 2 \text{й остатокъ} + 16ac - 24bc + 16c^2 \\
 \quad - 16ac + 24bc - 16c^2 \\
 \hline
 \text{послѣдній остатокъ} 0
 \end{array}$$

Что изъяснимъ объ извлеченіи пятаго корня, подаемъ намъ понятіе о томъ, какимъ образомъ должно поступать при извлеченіи корней прочихъ степеней.

По образцу степеней двучастнаго количества, пятая степень изъ $a + b$ должна быть $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Изъ всѣхъ 6 членовъ довольно первыхъ двухъ, чтобъ вывести желаемое правило.

Первый членъ представляетъ пятую степень перваго члена двучастнаго корня, а второй произведение четвертой степени того же перваго члена на второй членъ, взятое пять разъ; слѣд. для сысканія перваго члена въ корнѣ, надлежитъ по расположеніи всѣхъ членовъ данной степени, извлечь пятой корень изъ перваго члена; а чтобъ найти второй членъ корня, должно раздѣлить второй членъ извлекаемаго количества на упятеренную четвертую степень прежде найденнаго корня. Ибо можно видѣть, что пятой корень изъ a^5 есть a первой членъ двучастнаго, котораго пятую степень изображаетъ количество $a^5 + 5a^4b +$ и проч. Равномѣрно понять не трудно, что $\frac{5a^4b}{5a^4}$ въ частномъ даетъ b второй членъ двучастнаго корня. Когдажъ случится, что данное извлечь

количество не будетъ представлять совершенной пятой степени, тогда сыскавши показаннымъ способомъ второй членъ корня, надложимъ повѣрить сей корень, составивши изъ него пятую степень, и исключивши оную изъ предложеннаго количества. Слѣдующій примѣръ объяснитъ лучше.

Требуется извлечь пятой корень изъ

$$\begin{array}{r} 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \\ \hline 32a^5 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2a+3b \text{ К.} \\ 80a^4 \end{array} \right\}$$

$$\text{Остатокъ } + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$$

Ищу пятой корень изъ $32a^5$; онъ есть $2a$, которой и пишу по сторону даннаго количества.

Возвожу $2a$ въ пятую степень, и произведение $32a^5$ подношу съ противнымъ знакомъ подъ первой членъ $32a^5$ даннаго количества; онъ чего онъ и уничтожился.

Составляю изъ корня $2a$ четвертую степень: она выходитъ $16a^4$, а упятеренная $80a^4$, которую пишу подъ корнемъ $2a$; дѣлю на $80a^4$ первой членъ $240a^4b$ остатка, и въ частномъ получаю $3b$, которое приписываю къ корню; такимъ образомъ $2a + 3b$ получаю за искомый корень; а чтобы повѣрить его, то составляю изъ $2a + 3b$ пятую степень, которая выходитъ съ такими же членами, какія находятся въ данномъ количествѣ; дѣлаю вычитаніе, въ остаткѣ не выходитъ ничего; изъ сего заключаю, что пятой корень есть въ точности $2a + 3b$.

Если бы надлежало быть еще члену въ корнѣ, то послѣ сего дѣйствія вышелъ бы остатокъ: и для сысканія сего новаго члена должно, принявъ $2a + 3b$ за одно количество, дѣлать съ нимъ тоже, что сдѣлано было съ $2a$ для втораго члена въ корнѣ.

Часть III.

I

132. Что касается до количествъ, изъбраженныхъ въ числахъ, то правило для извлечения ихъ корней служить тоже; одно только то сдѣлается объясненъ, что означаемъ первому члену a^5 , и что означаемъ члену $5a^4b$.

Для наблюденія порядка въ семъ изысканіи, надлежитъ вообразить, что a означаетъ количество $a + b$ означаетъ десятки, а b единицы; послѣ чего не трудно увидѣться, что a^5 должно представлять собою тысячу, ибо пятая степень 10 составляетъ 100000; и такъ первой членъ a^5 или количество, изъ котораго извлекаемъ извлечемъ пятой корень для полученія первой цифры въ корнѣ, не можетъ содержаться въ пяти послѣднихъ цифрахъ съ правой руки; для сей причины надлежитъ отдѣлить пять послѣднихъ цифръ, и предположивъ, что останется ихъ въ двѣ или въ три, или меньше, искать для сихъ послѣднихъ пятой корень, второй легко найдется, потому что онъ долженъ состоять изъ одной цифры.

Сыскавши первую цифру корня, и исключивши пятую ея степень изъ количества, посредствомъ котораго нашли сей корень, должно попомъ къ остатку снести пять отдѣленныхъ цифръ; теперь подобно найдемъ

ту часть, которую сабдуешь дѣлать на $5a^4$, то есть, на унйперентую чеввертую степень сысканныхъ десятиковъ, надлежитъ сабдѣлить чепыре цифрѣ, въ право и дѣлать остальные въ лѣво, попомучию часть $5a^4b$, которую должно дѣлать на $5a^4$, чибовъ сыскать b , ге можешъ содержаться въ чепырехъ послѣднихъ цифрахъ; ибо $5a^4b$ выходитъ изъ произведенія $5a^4$ на b , и потому должно по крайней мѣрѣ сослаться изъ десятиковъ тысячъ, поелику a^4 представляешъ десятки тысячъ.

Здѣлавъ объясненія сіи, заключивъ, что производенно дѣйствія въ числахъ ошачается тоже, какое показано при ливперальномъ извлеченіи. Вотъ и примѣръ.

Требуется извлечь пятой корень изъ . . .

3802.04032 } 52 корень.

315

6770.4032

3125

380204032

0.

Ошачавъ пять послѣднихъ цифръ 04032, пишу пятой корень числа 3802, которое заключаа меньше пятии знаковъ, должно имѣть корень (бѣ одной цифрѣ. Сей корень есть 5, которой пишу по спору.

Составляю изъ 5 пятую степень, и пишу произведеніе подѣ 3802; сдѣлавъ вычитаніе, въ

остатокъ получаю 677, къ которому сношу отдѣленныя пять цифръ; отдѣляю снова у снесенныхъ чепыре цифры въ право, и дѣлю остальную часть 6770 на четверную степень найденнаго корня 5, пять разъ взятую, то есть, на 5 разъ 625, или на 3125; въ частномъ нахожу 2, которое пишу подлѣ перваго корня 5. Для повѣрки корня 52, ссавляю изъ него пятую степень, и нахожу въ ней точно такое же число, какъ и данное; почему заключаю, что 52 есть совершенной корень изъ даннаго числа.

Когда случится остатокъ и понадобится подопти ближе къ насоящему корню, то прибавивъ къ остатку пять нулей, надлежитъ для полученія прешней цифры въ корнѣ, которая будетъ представлять десятичную, продолжать дѣйствіе также, какъ и для виной.

Вообще для извлеченія корня всякой степени m , надлежитъ извлекаемое количество раздѣлить на грани, начиная отъ правой руки къ лѣвой, въ каждой по m цифръ, изъ которыхъ послѣдняя грань въ лѣво можетъ имѣть ихъ меньше; потомъ извлечь корень степени m изъ сей послѣдней грани (корень сей долженъ состоять всегда изъ одной цифры); къ остатку снести слѣдующую грань съ отдѣленіемъ у ней $m - 1$ цифръ въ право, и раздѣлить остальную часть въ лѣво на m разъ составленную $m - 1$ степенъ изъ найденнаго корня, и такъ далѣе. Дозказательствомъ на сіе служитъ то, что два первые члена двучастнаго $a + b$, возведеннаго въ какую нибудь степень m , суть $a^m + ma^{m-1}b$, и то, что a^m (положивъ,

что a представляет десятки, а b единицы) не можетъ имѣть части въ числѣ m послѣднихъ цифръ, и $ma^{m-1}b$ не можетъ также заключаться въ числѣ $m-1$ послѣднихъ цифръ.

Способъ извлекать Корни изъ несовершенныхъ степеней лигатуральныхъ количествъ чрезъ Приближение.

133. Еслили многочленное количество не представляетъ совершенной степени извлекаемаго корня, то не можно надѣяться получить его въ точности; но надлежитъ довольствоваться тѣмъ, чтобы подойти къ нему столь близко, сколько потребуетъ нужда. Можно достигнуть до сего по изъясненному правилу для извлечения корней изъ совершенныхъ степеней; ибо помощію его выводятся безконечной порядокъ дробныхъ членовъ, коихъ величина умалается безпрестанно, и для того можно ограничиться на извѣстномъ числѣ членовъ, а прочіе оставить; но такое дѣйствіе трудно и продолжительно. И такъ постараемся дойти къ концу кратчайшею дорогою, употребивъ данное (128) правило для возведенія двучастнаго количества въ требуемую степень. Для сего должно припомнить, что (109) всякой корень можетъ представлено быть дробною степенью. Такимъ образомъ

претованъ квадратной корень изъ количества $a + b$, или найди величину $\sqrt{a + b}$, значить претованъ возвести $a + b$ въ степень $\frac{1}{2}$, потому что (109) $(a + b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a + b}$.

Слѣд. по показанному (128) правилу, пишу образцовой порядокъ членовъ: $\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$, ... $\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}-4}{5}$ и проч. а по приведеніи $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{16}$ и проч.

И поставивъ 1 первымъ членомъ во второй стро-
кѣ, вывожу слѣдующій порядокъ

$$1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{b^4}{a^4} + \frac{35}{16384} \frac{b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$

Умножая первой членъ 1 на первой членъ $\frac{1}{2}$ верх-
ней строки и на $\frac{b}{a}$, то есть, на второй членъ дву-
частнаго $a + b$ раздѣленной на первой, получаю $\frac{1}{2} \frac{b}{a}$
второй членъ.

Составляю третій членъ умноженіемъ найден-
наго сего второго на второй $-\frac{1}{4}$ верхней строки и
на $\frac{b}{a}$; отъ чего выходитъ $-\frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2}$ третій членъ.

Умножаю сей третій на третій членъ $-\frac{1}{16}$ верх-
ней строки и на $\frac{b}{a}$; получаю $+\frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3}$ четвертымъ
членомъ, и такъ далѣе.

Наконецъ умножаю въ найденные члены на пер-
вый членъ двухчастнаго, возведенный въ степень $\frac{1}{2}$,
и получаю за величину $(a + b)^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{a + b}$ слѣ-

дующее количество, $a^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{3} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{b^3}{a^3} \right.$
 $\left. - \frac{1}{24} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{240} \frac{b^5}{a^5} \text{ и проч.} \right)$, которое можно про-
 длжить сколько, сколько угодно.

И такъ величина $\sqrt[5]{101}$ превращается въ

то $(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8})$, то есть, въ $10 (1 + 0,005 - 0,000125)$, или $10 \times 1,004875$, или $10,04875$, наконецъ въ $10,0499$ въ одинъ только десяти тысячныхъ.

Правило сѣ можно примѣнить ко всѣмъ корнямъ и ко всѣмъ количествамъ; здѣлаемъ на него еще примѣръ, и пусть будетъ дано $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$. Слѣдовательно перемѣнивъ количество сѣ на $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$, будемъ поступать какъ выше, и напишу:

$$\frac{1}{5}, \frac{\frac{1}{5}-1}{2}, \frac{\frac{1}{5}-2}{3}, \frac{\frac{1}{5}-3}{4}, \frac{\frac{1}{5}-4}{5} \text{ и проч.}$$

$$\text{или } \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{12}{5} \text{ и проч.}$$

По томъ поставивъ первымъ членомъ второй строки 1, выведу слѣдующіе члены такъ

$$1 - \frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{2}{5} \frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{6}{55} \frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{42}{1555} \frac{x^{20}}{a^{20}} - \frac{798}{15515} \frac{x^{25}}{a^{25}} \text{ и проч.}$$

Изъ умноженія перваго члена 1 на первой членъ $\frac{1}{5}$ верхней строки и на $-\frac{x^5}{a^5}$, то есть, на второй членъ двучаснаго, раздѣленный на первой, выходящій $-\frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5}$ второй членъ нижняго порядка.

Для полученія третяго члена, умножу сей найденной второй членъ на второй членъ $-\frac{2}{5}$ верхней строки и на $-\frac{x^5}{a^5}$; сей третій членъ будетъ $-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}$.

Наконецъ сыскавъ такимъ же образомъ послѣдующіе члены даже до шестого, и умноживъ все на первой членъ a^5 двучаснаго количества, возведенной въ степень $\frac{1}{5}$, то есть (96) на $a^5 \times \frac{1}{5}$, или на a , получу за величину, которая близко подходитъ къ настоящей $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$, количество $a (1 - \frac{x^5}{5a^5} - \dots$

$$\frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{42x^{20}}{1250a^{20}} \text{ и проч.})$$

134. Что касается до порядка выводимыхъ членовъ, то замѣсимъ, что за первой членъ даннаго количества должно принимать всегда самой большой; на примѣрѣ въ $\sqrt[5]{(a + b)}$ принимали мы выше a первымъ членомъ; но если бы b случилось больше a , то должно бы принять b за первой членъ. Доказательствомъ сему служило то, что когда b больше a , то 1^е порядкомъ $(1 + \frac{1}{5} \frac{b}{a} - \frac{1}{5} \frac{b^2}{a^2} \text{ и пр.})$ выходитъ ложный; ибо $\frac{b}{a}$ будетъ въ такомъ случаѣ больше 1 и послѣдующіе члены, которые умножаются безпрестанно на $\frac{b}{a}$ будутъ продолжаться увеличиваясь такъ, что нельзя будетъ узнать, на какомъ членѣ должно остановиться. И такъ въ семъ случаѣ должно составлять порядокъ членовъ, принимая b за первый. Этотъ порядокъ происходить такой $b^{\frac{1}{5}} (1 + \frac{1}{5} \frac{a}{b} - \frac{1}{5} \frac{a^2}{b^2} \text{ и проч.})$, въ которомъ члены идутъ уменьшаясь.

Порядки, въ которыхъ члены идущіе увеличиваясь по мѣрѣ какъ они удаляются отъ начала своего, называющіеся *отходящими*; а тѣ, въ которыхъ члены уменьшаются, удаляясь отъ своего начала, называются *сближающимися*.

135. Видѣли мы (118), что всякую Алгебраическую дробь можно представить въ видѣ цѣлаго, написавъ знаменателя ея къ числителю съ отрицательнымъ показателемъ. Сие наблюдение подаетъ намъ способъ изображать широкою всякую дробь, которой знаменателемъ служитъ разное число, и принесетъ впередъ великую пользу.

На примѣръ вмѣсто данной дроби $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ могу написать $a^2 \times (a^2 - x^2)^{-1}$; попомѣ возведу $a^2 - x^2$ въ степень -1 по данному (128) правилу, то есть, напишу напередъ строку:

$$-1, \frac{-1-1}{2}, \frac{-1-2}{3}, \frac{-1-3}{4}, \text{ и проч.}$$

или $-1, -1, -1, -1$.

И составляю слѣдующій порядокъ членовъ:

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} \text{ и проч.}$$

Изъ умноженія перваго члена 1 второй строки на первой членъ -1 верхней и на $-\frac{x^2}{a^2}$, выходитъ

$+\frac{x^2}{a^2}$; изъ умноженія сего втораго на второй членъ — 1 верхней строки и на $-\frac{x^2}{a^2}$, выходитъ $+\frac{x^4}{a^4}$, и такъ далѣе.

Умноживъ все на первой членъ a^2 , возведенный въ степень — 1, то есть (95) на $a^2 \times^{-1}$, или на a^{-1} , получу $a^{-2} (1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{проч.})$ вмѣсто величины $(a^2 - x^2)^{-1}$; следовательно для сысканія величины $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$, спонсѣ только умножимъ найденную величину на a^2 ; но $a^{-2} \times a^2$ дѣлаетъ a^{2-2} или a^0 , количество равное 1; следовательно $a^2 (a^2 - x^2)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{проч.}$

Такимъ же образомъ приводи въ часовой порядокъ и все прочія количества. Вмѣсто $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^2}$ прими $\frac{a^2 (a^2 + x^2)^{-2}}$. Равномѣрно вмѣсто
 $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$ напиши напередъ $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, а потомъ $a^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$, и такъ и проч.

Объ уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными количествами, пресосходящихъ первую степень.

136. Уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ третьей, четвертой, пятой и проч. степени называется то, въ которомъ самая большая степень неизвѣстнаго будетъ какая нибудь изъ объявленныхъ; однакожъ урав-

неніе можеть сверхъ сей степени заключать еще въ себѣ и другія нижнія.

На примѣръ $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$, будутъ всѣ сіи уравненія третьей степени.

Уравненіе съ двумя или большимъ числомъ неизвѣстныхъ, превосходящее первую степень, называется не только тогда, когда одно изъ неизвѣстныхъ превышаетъ первую степень; но и тогда, когда нѣкоторые изъ неизвѣстныхъ бывають умножены между собою; вообще степень увеличивается по мѣрѣ, какъ сумма показателей усугубляется въ какомъ нибудь членѣ.

Уравненіе $x^3 + y^3 = a^3b$ есть третьей степени; уравненіе $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ называется также третьей степени, поному что показатели количествъ x и y въ членѣ x^2y составляютъ 3, но въ прочихъ членахъ они меньше.

137. Для рѣшенія вопросовъ, принадлежащихъ къ уравненіямъ съ многими неизвѣстными и превышающихъ первую степень, должно, какъ и въ уравненіяхъ первой степени, приводить ихъ въ одно такое, которое бы заключало въ себѣ одно неизвѣстное.

Еслили будутъ даны двѣ экваціи съ двумя неизвѣстными количествами, изъ ко-

торыхъ въ одной какое нибудь изъ неизвѣстныхъ не превосходитъ первой степени; но для рѣшенія ихъ, выведи въ уравненіи, гдѣ заключается неизвѣстное первой степени, величину его, почитая все прочее въ томъ уравненіи какъ бы извѣстнымъ, и вставь величину сію въ другое; отъ чего произойдетъ новое уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

На примѣръ въ слѣдующемъ вопросъ: сыскать два числа, коихъ бы сумма равнялась 12, а произведение 35? положивъ искомые числа x и y , получу $x + y = 12$ и $xy = 35$.

Изъ перваго уравненія выведу $x = 12 - y$, и вставивъ во второе въ мѣсто x сысканную величину его, получу $(12 - y)y = 35$, или $12y - y^2 = 35$ эквацію второй степени, которая будучи рѣшена по правиламъ (87 и слѣд.), дастъ $y = 6 \pm 1$, то есть, $y = 7$ или $y = 5$; а какъ $x = 12 - y$, то слѣд. x будетъ $= 5$, или $x = 7$, то есть, искомые два числа будутъ 5 и 7, или 7 и 5.

Равномѣрно для рѣшенія уравненій $x + 3y = 6$ и $x^2 + y^2 = 12$; изъ перваго выведу $x = 6 - 3y$, и вставивъ во второе величину сію, получу $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; по совершеніи показаннаго дѣйствія, найду $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$, или по перенесеніи всего въ одну сторону $10y^2 - 36y + 24 = 0$, уравненіе второй степени, которое разрѣшится по правиламъ (87 и слѣд.).

Для третьяго примѣра возьмемъ двѣ экваціи $xy + y^2 = 5$ и $x^2 + x^2y = y^2 + 7$. Изъ первой выходишь $x = \frac{5 - y^2}{y}$; по вставкѣ величины сей во второе уравненіи найдемся $\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 + \left(\frac{6 - y^2}{y}\right)^2 y$

$y^2 + 7$; сіе неаудно, по совершеніи въ немъ показанныхъ действий и по приведеніи, преемъ спя въ $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, въ уравненіи съ од имъ неизвѣстнымъ y , и будемъ пятой степени.

138. Еслили между данными уравненіями найдется какое-либо меншой степени, и въ которомъ одно изъ двухъ неизвѣстныхъ количествъ не будетъ превышать второй степени; то взявши въ уравненіи меншой степени величину квадрата не столь возвышеннаго неизвѣстнаго, поставь ее въ другомъ въ мѣсто квадрата того же неизвѣстнаго и его степени; продолжай вставлятъ величину сію до тѣхъ поръ, пока неизвѣстное сдѣлается первой степени. Тогда извлеки въ послѣднемъ селъ уравненіи величину того же неизвѣстнаго, поставь ее въ данномъ меншой степени.

На примѣрѣ въ данныхъ двухъ экваціяхъ $x^2 + 3y^2 = 6x$ и $2x^3 - 3y^2 = 3$; изъ первой вѣзму величину x^2 , говоратъ есмь $x^2 = 6x - 3y^2$, и вставивъ ее во второй, получу, (замѣнивъ, что x^3 происходитъ изъ $x^2 \times x$), $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 3$, и по приведеніи $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 3$; а какъ и въ этомъ уравненіи нахлится x^2 , и вставляю въ немъ ее величину x^2 , и на селу $7x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 3$, эквацію, въ которой x состоитъ въ первой степени.

Извлекаю величину x и получаю $x = \frac{30y^2 + 3}{12 - 6y^2}$; вставляю величину сію въ первой экваціи $x^2 +$

$$\begin{aligned}
 3y^2 &= 6x, \text{ снѣ чего выходишь } \left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2} \right)^2 + 3y^2 \\
 &= 6 \left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2} \right), \text{ или } \frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}, \\
 &\text{или } \frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 \cdot \frac{(72 - 6y^2)^2}{(72 - 6y^2)^2} = \frac{(234y^2 + 48)}{(72 - 6y^2)^2}, \text{ эквация, въ которой снѣснѣ только} \\
 &\text{сдѣланъ умноженіе и сдѣланъ членъ приведенъ.}
 \end{aligned}$$

Объ урасненіяхъ съ двумя членами.

139. Урасненія съ двумя членами суть тѣ, въ которыхъ неизвѣстнаго находится въ одинакой степени, и называюся такъ потому, что могутъ приведены быти всегда въ два члена.

На примѣръ уравненіе $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^2b^3$ есть съ двумя членами: въ первомъ членѣ его въ пятой степени $a + b$ и $x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, не трудно примѣчанію, что a и b представляютъ извѣстныя количества, и снѣд. можно всегда $a + b$ и $a^4b^2 - a^3b^3$ представить въ одномъ количествѣ; такъ что эквация сія и есть перемѣнившая въ следующую другую $ax^5 = q$.

Уравненія такого рода весьма легко рѣшаются; потому что, какъ можно видѣти изъ самаго примѣра, снѣснѣ только сдѣлали снѣ степени неизвѣстнаго множителей, или дѣлителей, и потомъ извлечь корень, означенный показателемъ пог. же неизвѣстнаго.

На примѣръ эквация $ax^5 = q$ превращается въ $x^5 = \frac{q}{a}$, а сія эквация имѣетъ корни въ $x = \sqrt[5]{\frac{q}{a}}$.

140. Когда показателя степени представляется не парное число, тогда въ корнѣ выходитъ одна только действительная или насупоящая величина; на примѣрѣ въ данной экваци $x^5 = 1024$, выходитъ $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; ибо видѣть можно, что нѣтъ другого числа, кромѣ настоящаго 4, которое, возведено будучи въ пятую степень, составило бы 1024.

Когда вторая часть уравненія находится съ знакомъ —, въ такомъ случаѣ величина количества x получаетъ знакъ —; потому что — умноженный на — нечетное число разъ, дѣлаетъ также —; естли же показатель представляется парнымъ числомъ, то неизвѣстное имѣетъ двѣ величины, одну положительную, а другую отрицательную, изъ которыхъ обѣ могутъ быть настоящими или умственими. Умственныя величины выходятъ, когда вторая часть уравненія бываетъ съ знакомъ —.

Въ данной экваци $x^4 = 625$ можно заключить, что $x = \sqrt[4]{625} = 5$; но какъ — умноженный на — четное число разъ, дѣлаетъ тоже въ произведеніи, что и + умноженный на +, то величина x можетъ также представлена быть чрезъ — 5; слѣд. надлежитъ писать всегда $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$, какъ и въ уравненіяхъ вѣпорой степени. Когда же дано будетъ $x^4 = -625$, то должно заключить, что $x = \pm \sqrt[4]{-625}$; обѣ сии величины будутъ умствен-

ныя, пошому что нѣпѣ числа, ни положительнаго, ни отрицательнаго, которое бы, умножено будучи само на себя чотное число разѣ, могло произвешти отрицательное количество.

Здѣлаемъ задачу на уравненія такого роду. Положимъ, что требуется *найти два среднія пропорціональныя числа между 5 и 625*. Представивъ искомыя чрезъ x и y , получимъ $\div 5 : x : y : 625$ пропорцію, въ которой заключающіяся слѣдующія двѣ другія:

$$\begin{aligned} 5 : x &= x : y \\ x : y &= y : 625. \end{aligned}$$

Изъ сихъ двухъ пропорцій, по умноженіи въ нихъ крайнихъ и среднихъ членовъ, вывожу два уравненія $5y = x^2$ и $625x = y^2$. По первому получаю $y = \frac{x^2}{5}$; вставивъ величину $\frac{x^2}{5}$ въ мѣсто y во второмъ, нахожу $625x = \frac{x^4}{5}$; по раздѣленіи на x и умноженіи на 5, произойдетъ $x^3 = 15625$, и наконецъ $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; слѣд. $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

О уравненійхъ, которыя рѣшаются на подобіе уравненій второй степени.

141. Уравненія сіи должны заключать въ себѣ двѣ только разныя степени количества x , изъ которыхъ бы одна была притомъ вдвое больше другой; на пр. $x^4 + 5x^2 = 8$, и $x^6 + 5x^3 = 8$ суть уравненія такого свойства, и рѣшаются по тѣмъ же правиламъ, какъ второй степени; то есть, надлежитъ, по учиненіи въ нихъ вышней степени поло-

жительною, если она не такова, и по уничтоженіи въ ней всѣхъ количествъ умножающихъ или дѣлящихъ ее, взявъ половину изъ коэффициента меньшей степени неизвѣстнаго, и прибавить къ обѣимъ частямъ эквации по квадрату сей половины; отъ чего первая часть произойдетъ совершенной квадратъ. Тогда извлеки квадратной корень изъ обѣихъ частей, напиши корень второй съ двойныхъ знаковъ \pm ; послѣ чего уравненіе сдѣлается о двухъ членахъ.

На примѣръ требуется найти два числа, кои бы сумма кубовъ составляла 35, а произведеніе 6. По силѣ вопроса выходящъ двѣ эквации $x^3 + y^3 = 35$ и $xy = 6$. Въ послѣдней извлекаю величину $y = \frac{6}{x}$, которую вставивъ въ первой получаю $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; по уничтоженіи знаменателя и по переставкѣ членовъ $x^6 - 35x^3 = -216$. Беру половину изъ 35; она есть $\frac{35}{2}$; прибавляю квадратъ половины сей къ обѣимъ частямъ уравненія, и получаю $x^6 - 35x^3 + \left(\frac{35}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216$; извлекаю квадратной корень, и нахожу $x^3 - \frac{35}{2} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}$; по переставкѣ $x = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}$. наконецъ по извлеченіи кубическаго корня $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}\right)}$; но $\left(\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{1225}{4}$, а $\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216 = \frac{1225 - 864}{4} =$

$$\frac{361}{4}; \text{ слѣд. } \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]} = \sqrt{\left(\frac{361}{4}\right)} = \frac{19}{2}.$$

Почему $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35}{2} + \frac{19}{2}\right)}$ представляетъ такое уравненіе, въ которомъ x заключаетъ двѣ слѣдующія величины $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35+19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, и $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35-19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; а какъ найдено, что $y = \frac{6}{x}$, то y будетъ $= 2$ и $y = 3$.

Когда показатель вышней степени будетъ 4, или умноженное на 4, въ такомъ случаѣ можетъ выйти въ корнѣ до чепырехъ настоящихъ величинъ.

О Производствѣ или Составленіи уравненій.

142. Видѣли мы, что въ уравненіяхъ съ двумя членами, величина неизвѣстнаго выходитъ всегда одна настоящая, когда они бывають нечетной степени, въ четной же двѣ; сверхъ сего выходятъ еще многія другія величины умственные, которыя не меньше тѣхъ полезны, и съ которыми познакоимся какъ при рѣшеніи самихъ эквацій, такъ и въ другомъ мѣстѣ. *Еобще во всякомъ уравненіи выходитъ столько величинъ для неизвѣстнаго, сколько находится единицъ въ самомъ большомъ его показателѣ.* Изъ сихъ величинъ, которыя также называются *корнями* уравненія, однѣ могутъ быть положительными, другія отрицатель-

ными; иныя настоящими, а иныя умствеными.

143. Дабы увѣриться въ сей истиннѣ, должно примѣтить, что, по перенесеніи всѣхъ членовъ экваніи въ одну сторону, и по расположеніи надлежащимъ порядкомъ всѣхъ степеней x или неизвѣстнаго, можно почитать всѣ члены, состоящія въ одной части уравненія, за результатъ, вышедшій изъ умноженія многихъ двучленныхъ простыхъ факторовъ, изъ которыхъ всѣ имѣютъ общимъ членомъ x .

На примѣръ естьли уравненіе $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$ будетъ представлено въ такомъ видѣ $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$; то можно допустить, что количество $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$ вышло изъ умноженія трехъ простыхъ двучастныхъ факторовъ $x - a$, $x - b$, $x - c$.

Ибо по умноженіи сихъ трехъ факторовъ, получимъ - - - -

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx - abc &= 0 \\ - bx^2 + acx & \\ - cx^2 + bcx. & \end{aligned}$$

А чтобы увѣриться, что оба уравненія сіи одинаковы, то стоить только найти для

a, b, c такія величини, изъ которыхъ бы
 $a + b + c = 8$, $ab + ac + bc = 7$,
 и $abc = 9$.

Для сысканія же каждой изъ сихъ величинъ, на примѣрѣ a , надлежитъ, по умноженіи перваго уравненія на a^2 , а втораго на a , отъ чего выдетъ $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^2$, $a^2b + a^2c + abc = 7a$, и $abc = 9$, вычестъ второе изъ перваго, и къ остатку прибавитъ третье; послѣ чего выдетъ $a^3 = 8a^2 - 7a + 9$, или по переноскѣ $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$.

Такимъ же образомъ для величины b найдется эквація $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, и для c будетъ такого же рода $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Изъ сихъ заключеній можно вывести слѣдующія предложенія.

144. 1^е. Поелику уравненіе, въ которомъ величина a должна выйти, есть одинаково съ тѣмъ, какое служитъ для величины b и такое же, какое представляетъ величину c ; а какъ безъ сумнѣнія величины a, b, c не могутъ быть равны между собою; то надлежитъ, чтобъ всякое изъ трехъ уравненій заключало въ себѣ величины a, b и c ; почему каждое сіе уравненіе должно имѣть три корня, изъ которыхъ одинъ бу-

дѣтъ изображать величину a , другой b , а третій c .

2°. Каждое изъ трехъ составныхъ уравненій совершенно равняется данному $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, съ тѣмъ только различіемъ, что здѣсь a , или b , или c перемѣнены въ x . Почему данное уравненіе должно имѣть три корня, служащіе величинами a , b и c .

Слѣд. количества, которыя должно поставить вмѣсто a , b , c въ $x - a$, $x - b$, $x - c$, для производства уравненія $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$ чрезъ умноженіе сихъ простыхъ факторовъ, суть сами корни того же уравненія.

145. Если бы вмѣсто коэффициентовъ 8, 7 и проч. разныхъ степеней x , были другія числа, и когда бы въ мѣсто уравненія третьей степени было бы дано четвертой, пятой и проч.; то выведенныя нами заключенія не меньше будутъ справедливы. На примѣрѣ если бы вообще будетъ дана эквація $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, то предположивъ, что p , q , r , s представляютъ извѣстные числа, можно почитать сіе уравненіе за такое, которое произошло изъ умноженія четырехъ простыхъ факто-

ровъ $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$; ибо произведение четырехъ сихъ факторовъ въ самомъ дѣлѣ выходитъ слѣдующе

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx & \\ - cx^3 + adx^2 - acdx & \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2 & \end{aligned}$$

Но для равенства сего уравненія съ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, надлежитъ количествамъ a , b , c , d быть такого свойства, чтобъ $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, и $abcd = s$.

По умноженіи первой изъ сихъ эквацій на a^3 , второй на a^2 , третьей на a , и по исключеніи второй и четвертой изъ первой и третьей, сложенныхъ вмѣстѣ, выходитъ $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra - s$, или $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$; равнообразно найдемъ, что уравненіе, представляющее b , будетъ $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; уравненіе для c будетъ $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$, и уравненіе для d будетъ такое же $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. Почему уравненіе, коимъ опредѣляется величина a , должно такъ

же опредѣлить b , c и d ; слѣд. оно должно имѣть четыре корня, служащіе величинами для четырехъ количествъ a , b , c , d . А какъ примѣмъ каждое уравненіе есть одинаково съ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, то количества a , b , c , d , принятыя для составленія сего послѣдняго посредствомъ умноженія четырехъ простыхъ факторовъ $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, должны представлять самые корни сего уравненія.

146. И такъ 1°. вообще можно считать всякое уравненіе представляющимъ произведеніе столькихъ двучастныхъ простыхъ факторовъ, имѣющихъ общимъ членомъ букву неизвѣстнаго, сколько находится единицъ въ самомъ большемъ показателѣ неизвѣстнаго.

2°. Вторые члены сихъ двучастныхъ служатъ корнями уравненію, каждой будучи взята съ противнымъ знакомъ.

147. Еслили члены въ уравненіи, на мѣсто знаковъ по переменнѣ положительныхъ и отрицательныхъ, какъ предположено было въ предыдущемъ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, примутъ совсѣмъ другой видъ, на примѣръ такой $x^4 + px^3 - qx^2 - rx$

$+ s = 0$; то и тогда эквація сія можетъ также представлена быть чрезъ $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$, и что a, b, c, d будутъ также корнями сей послѣдней.

148. Поелику a, b, c, d и проч. служатъ корнями, то слѣдуетъ изъ уравненій $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$; 1^е что въ экваціи $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; и вообще во всякой другой коэффициентъ $-p$ втораго члена, взятой съ противнымъ знакомъ, то есть $+p$, равняется суммѣ всѣхъ корней.

2^е. Коэффициентъ q третьяго члена равенъ суммѣ произведеній ихъ корней, умноженныхъ по два.

3^е. Коэффициентъ четвертаго, взятой съ противнымъ знакомъ, равенъ суммѣ корней, умноженныхъ по три, и такъ далѣе. Наконецъ послѣдній членъ состоитъ изъ произведенія всѣхъ корней.

Сія истинна принадлежитъ вообще до всѣхъ членовъ, не смотря на различіе знаковъ уравненія; только надлежитъ брать

коэффициентъ члена парнаго числа всегда съ прошивнымъ знакомъ.

Изъ сего слѣдуетъ, что въ экваціи, неимѣющей втораго члена, находятся какъ положительные такъ и отрицательные корни, и что сумма однихъ равна суммѣ другихъ.

Такимъ образомъ въ экваціи $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, сумма трехъ корней: основнѣ изъ -2 ; сумма произведеній ихъ, умноженныхъ по два, изъ -23 ; сумма произведеній ихъ, умноженныхъ по три, или произведеніе трехъ корней составишъ изъ $+60$. Въ самомъ дѣлѣ три корня сей экваціи суть $+5$, -4 , -3 ; ибо еслии принять будепъ за величину x каждое изъ сихъ число, то первая часть уравненія превратится въ нуль; и явствуетъ также, что сумма сихъ трехъ чиселъ, то есть, $+5 - 4 - 3$ равняется -2 , сумма ихъ произведеній по два, или $-20 - 15 + 12$ равна -23 , и произведеніе ихъ по три составишъ изъ $5 \times -4 \times -3$, то есть, изъ $+60$.

Равномѣрно изъ экваціи $x^3 - 19x + 30 = 0$, въ которой втораго члена не находится, заключаю, что она имепъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя корни, и что сумма первыхъ равна суммѣ вторыхъ; ибо при оные корни суть дѣйствительно $+2$, $+3$, -5 .

149. Разсматривая уравненіе, составнымъ изъ произведенія многихъ двучленныхъ простыхъ факторовъ, легко увѣриться можно, какимъ образомъ разныя многія числа рѣшатъ его. На примѣръ слѣдующій вопросъ можепъ доказать намъ справедливость того:

Найти такое число, изъ котораго ест-
ли вычтешь 5, и потомъ къ нему же са-
мому прибавишь попережѣнно числа 4 и 3,
то двѣ суммы умноженныя между собою
и на остатокъ должны равняться нулю?
Положимъ число сіе x ; слѣд. $x - 5$ будетъ
представлятъ остатокъ, а $x + 4$ и $x + 3$
двѣ суммы; слѣд. по силѣ вопроса надле-
житъ, чтобъ $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$
 $= 0$, то есть, $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$;
но безъ сумнѣнія произведеніе сіе, или рав-
ное ему $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$
можетъ во всѣхъ трехъ случаяхъ обратитъ-
ся въ нуль, именно когда положишь $x = -4$,
 $x = -3$, и $x = 5$. Ибо въ первомъ слу-
чаѣ оно изобразится чрезъ $0 \times (-4 + 3)$
 $\times (-4 - 5)$; во второмъ чрезъ $(-3$
 $+ 4) \times (0) \times (-3 - 5)$; въ треть-
емъ чрезъ $(5 + 4) \times (5 + 3) \times (0)$.
По чему въ уравненіи $x^3 + 2x^2 -$
 $23x - 60 = 0$ не можно именно утвер-
дить, какое лучше взять число -4 , или
 -3 , или $+5$, попому что каждое изъ
нихъ обращаетъ первую часть его въ нуль,
и слѣд. рѣшишь его.

150. Сдѣлаемъ еще здѣсь замѣчаніе,
которое будетъ намъ полезно. Каждое изъ
уравненій $a + b + c + d = p$, $ab + ac +$

$ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$ выводитъ одинакую эквацію какъ для опредѣленія величины a , такъ b , такъ и проч. Причиною сему служитъ то, что всѣ количества a , b , c , d располагаются въ каждой экваціи одинакимъ образомъ, и потому не для чего опредѣлять одно количество противнымъ дѣйствіемъ тому, которымъ опредѣляется другое. Вообще если при изысканіи многихъ неизвѣстныхъ количествъ принуждены бываемъ для каждаго употреблять одинакія рассужденія, одинакія дѣйствія и одинакія извѣстныя количества; то всѣ сии количества должны быть необходимо корнями того же уравненія, и слѣд. рѣшеніе задачи такого рода приводитъ къ составному уравненію.

151. Поелику можно приниматьъ уравненіе составленнымъ изъ произведенія многихъ простыхъ факторовъ; то слѣд. можно его принимать также за вышедшее изъ произведенія многихъ сложныхъ факторовъ.

На примѣръ эквацію третьей степени можно почитать составленную изъ произведенія фактора второй степени, какъ $x^2 + ax + b$ на фактора первой степени, на примѣръ $x + c$; ибо $x^2 + ax + b$ можетъ безъ сумнѣнія представлять произведеніе двухъ другихъ простыхъ факторовъ.

Равномѣрно можно почитать эквацію четвертой степени за такую, которая входитъ или изъ про-

изведенія чепырехъ простыхъ факторовъ, или двухъ факторовъ второй степени, или одного фактора третьей степени, а другаго первой.

152. А какъ уравненіе второй степени можетъ имѣть мнимые корни, то и уравненія вышней степени могутъ ихъ имѣть также.

О Перемѣнахъ или Превращеніяхъ, которыми могутъ подлежать уравненія.

153. Эквации могутъ перемежаться различно, и для того прежде рѣшенія ихъ поговоримъ о сихъ превращеніяхъ.

154. *Если въ эквации перемежаться знаки членовъ, представляющихъ нечетныя степени, то положительные корни сего уравненія превратятся въ отрицательные, а отрицательные въ положительные.*

Ибо для перемежн знаковъ корней въ уравненіи, стоиптъ только поспавипъ — x въ мѣсто $+x$; но такая всапка не можетъ перемежиптъ знаковъ въ членахъ, заключающихъ парныя степени количества x , а только перемежаетъ ихъ въ тѣхъ, которые содержатъ нечетныя степени.

155. *Для превращенія эквации съ знаменателями въ такую, въ которой бы ни знаменателей, ни коэффициента у перваго члена не находилось, надлежитъ*

поставить вмѣсто неизвѣстнаго другое неизвѣстное, раздѣленное на произведение всѣхъ знаменателей, и умножить потомъ новое уравненіе на знаменателя перваго члена.

На примѣрѣ есѣли будетъ дано такое уравненіе $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$; то сдѣлаю $x = \frac{y}{mnp}$, и поставивъ величину x въ данной экваціи, получу $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; умножу на $m^3n^3p^3$; отъ чего выйдетъ $y^3 + \frac{am^3n^3p^3y^2}{m^3n^2p^2} + \frac{m^3n^3p^3c}{mn^2p}y + \dots$
 $\frac{m^3n^3p^3d}{p} = 0$, а по совершеніи показанныхъ дѣйствій $y^3 + apy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

156. Когда m , n и p будутъ равны между собою, то довольно въ такомъ случаѣ сдѣлать $x = \frac{y}{m}$. Отсюда слѣдуетъ, что для превращенія экваціи, въ которой всѣ коэффициенты будутъ дѣльными числа, и притомъ первой членъ ея будетъ также съ коэффициентомъ, въ другую, которой бы первой членъ не имѣлъ коэффициента, а прочіе члены были бы съ коэффициентами, состоящими изъ дѣльныхъ чиселъ, надлежитъ сдѣлать $x = \frac{y}{m}$; m въ такомъ случаѣ означаетъ коэффициентъ перваго члена; ибо раздѣливъ данное уравненіе $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$ на m , получу другое $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, въ которомъ всѣ знаменатели равны.

157. Для уничтоженія втораго члена экваціи, должно поставить вмѣсто неизвѣстнаго другое неизвѣстное, усугублен-

ное коэффициентомъ второго члена, взятымъ съ противнымъ знакомъ, и раздѣленнымъ на показателя первого члена.

Ибо еслили представивъ вообще эквацію чрезъ $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + k = 0$, положимъ $x = y + s$, то произойдетъ два уравненія и при неизвѣстныхъ, изъ которыхъ каждое опредѣляется произвольно.

Когдажъ въ каждомъ членѣ въ мѣсто степени x поставимся подобная степень изъ $y + s$, то (126) произойдетъ порядокъ членовъ слѣдующій:

$$\begin{aligned} y^m + msy^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot s^2y^{m-2} \text{ и проч. } \dots + k = 0 \\ + ay^{m-1} + (m-1) \cdot asy^{m-2} \text{ и проч.} \\ + by^{m-2} \text{ и проч.} \end{aligned}$$

И такъ принявъ y за неизвѣстное, примѣчаемъ, что новая эквація можетъ сдѣлаться безъ второго члена тогда только, когда s будетъ такого свойства, что $ms + a = 0$, то есть, когда возмемъ $s = -\frac{a}{m}$ такой величины, какая выходитъ изъ сего уравненія. Но видѣли мы, что за какую нибудь изъ сихъ неизвѣстныхъ и слѣд. за s можно принимать произвольную величину; а какъ $-\frac{a}{m}$ представляетъ такую величину, которая нужна вмѣсто s для экваціи въ y безъ второго члена, то для превращенія даннаго уравненія $x^m + ax^{m-1} +$ и проч. въ другое безъ второго члена, должно сдѣлать $x = y - \frac{a}{m}$.

На примѣръ желая уничтожить второй членъ въ экваціи $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$, сдѣлаю $x =$

$y = \frac{5}{2}$, то есть, $x = y - 2$. По вставкѣ сей величины въ данное уравненіи получаю

$$\begin{aligned} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0 \\ + 6y^2 - 24y + 24 & \\ - 3y + 6 & \\ + 4 & \end{aligned}$$

А по приращеніи выходитъ $y^3 - 15y + 26 = 0$ эквація безъ втораго члена y^2 .

О рѣшеніи Сложныхъ уравненій.

158. Мы будемъ предполагать въ послѣдующихъ изъясненіяхъ всѣ члены экваціи перенесенными въ одну сторону.

Рѣшить вообще эквацію всякой степени, на пр. $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + k = 0$, значитъ сыскавъ для неизвѣстнаго столько величинъ, сколько находится единицъ въ самомъ большемъ его показателѣ, и изъ которыхъ каждая изображена буквами p , q и проч. k , соединенными между собою всякимъ образомъ; такого напослѣдокъ свойства, чтобъ каждая величина, поставленная въ мѣсто x въ экваціи, превратила первую ея часть въ нуль, независимо отъ всякой особенной величины p , q и проч.

Мы намѣрены употребить нижеслѣдующій способъ для одного только рѣшенія

третьей степени, хотя онымъ можно рѣшить вообще уравненія всѣхъ степеней, и сѣд. четвертой; однако для сей четвертой извѣстимъ другой легчайшій и на шѣхъ же правилахъ основанной. Въ каждомъ способѣ принимается рѣшимая эквація за результатъ двухъ другихъ съ двумя неизвѣстными. Сии двѣ новыя экваціи должны быть такого свойства, чтобъ, по совершеніи надъ ними нѣкоторыхъ дѣйствій, можно было приводить ихъ въ одну съ однимъ неизвѣстнымъ такую, которая бы въ точности сходствовала съ данною. II такъ все дѣло состоитъ въ выборѣ ихъ; посмотримъ же, какія именно должны онѣ быть.

Хотя сей способъ не требуетъ уничтоженія иного члена въ разрѣшаемомъ уравненіи, однако для удобства выкладокъ будемъ предполагать его вездѣ уничтоженнымъ по данному (157) правилу.

Такимъ образомъ $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \text{и проч.} + k = 0$ будетъ представлять вообще всякое рѣшимое уравненіе.

Возьми двѣ экваціи $y^m - 1 = 0$, и $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \text{и проч.} - - + x = 0$; гдѣ a, b, c , и проч.

Часть III.

Л

суть количества неизвѣстныя, которыя опредѣлимъ такъ, какъ будетъ показано ниже.

Посредствомъ сихъ двухъ послѣднихъ уничтожай u до тѣхъ поръ, пока произойдетъ эквація въ x степени m и безъ вышатаго члена.

Коеффициенты разныхъ степеней x будутъ состоять изъ a , b , c и ихъ степеней.

Сравни каждого новаго коеффициента съ коеффициентомъ соотвѣтственной степени x въ данной экваціи $x^m + px^{m-2} +$ и проч. отъ чего произойдетъ столько эквацій для опредѣленія a , b , c и проч., сколько находится этихъ количествъ. По опредѣленіи a , b , c и проч. получишь всѣ корни или величины x помощію вставки величинъ a , b , c и проч. въ экваціи $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} +$ и проч. $+ x = 0$, полагая попеременно вмѣсто u каждой изъ корней уравненія $u^m - 1 = 0$, которыя, какъ увидимъ ниже, опредѣлить не трудно.

Припоровка для третьей Степени.

159. Пусть будемъ дано рѣшить слѣдующее уравненіе $x^3 + px + q = 0$.

Возьмемъ $y^3 - 1 = 0$, и $ay^2 + by + x = 0$.

Для уничтоженія y , умножаю последнюю эквацію на y , и поставивъ вмѣсто y^3 величину его 1 , выведу изъ $y^3 - 1 = 0$, получу $by^2 + xy + a = 0$. Умножу оную сію новую на y , и вставивъ въ мѣсто y^3 величину его 1 , найду $xy^2 + ay + b = 0$.

И такъ произойдутъ три слѣдующія уравненія:

$$ay^2 + by + x = 0$$

$$by^2 + xy + a = 0$$

$$xy^2 + ay + b = 0.$$

Последнимъ двухъ первыхъ найду величины y^2 и y по правиламъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными; величины сіи будутъ

$$y^2 = \frac{xx - ab}{bb - ax}, \text{ и } y = \frac{aa - bx}{bb - ax}.$$

Вставивъ сіи величины въ третье уравненіи $xy^2 + ay + b = 0$, получу $\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{bb - ax} + b = 0$, или по уничтоженіи знаменателя и по приведеніи

$$x^3 - 3abx + a^3 = 0.$$

Сравнивъ эту эквацію съ $x^3 + px + q = 0$, нахожу, что для равенства ихъ надобно, чтобъ $-3ab = p$, и $a^3 + b^3 = q$. По симъ двумъ уравненіямъ приспущаю къ опредѣленію a и b .

Изъ перваго вывожу $b = -\frac{p}{3a}$; по вставкѣ сей величины во второмъ уравненіи нахожу $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, или по умноженіи его на a^3 и по переслѣдкѣ членовъ $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$, такое, которое разрѣшаюсь по уравненію второй степени (141), обративъ въ

$a^3 - qa^2 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$, потомъ въ $a^3 = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$, по сноскѣ часнѣ въ $a^3 = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$, и наносаждокъ въ $a = \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$.

Для полученія b , вспарываю въ экваци $a^3 - b^3 = q$ сысканную величину a^3 , отъ чего ир исходящъ $\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 - b^3 = q$; по перенесеніи часновъ $b^3 = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 - q$, и слѣд. $b = \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 - q}$.

Но изъ экваци $ay^3 + by + x = 0$, выходитъ $x = -ay^3 - by$; и слѣд. $x = -y^3 \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2} - y \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 - q}$ будетъ такое уравненіе, которое содержишь въ себѣ три корня.

Теперь спомнѣ только узнать величины y . Изъ экваци $y^3 - 1 = 0$ выходитъ $y^3 = 1$, и слѣд. по извлеченіи кубическаго корня $y = 1$. Для сысканія же двухъ другихъ корней, разлагаю (151) $y^3 - 1$ на $y - 1$, и получу $y^2 + y + 1$; приравняю количество сіе къ нулю, отъ чего выдеиъ экваци, содержащая въ себѣ два прочіе корня. По разрѣшеніи $y^2 + y + 1$

$y^2 + y + 1 = 0$, найду $y = \frac{-1 \pm \sqrt{(-3)}}{2}$; и слѣд. три величины y будутъ слѣдующія $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, и $y = \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}$. Вставивъ попеременно величины сіи въ $x = -y^3 \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2} - y \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 - q}$, и замѣнивъ, что два количества $\left(\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}\right)^3$ и $\left(\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}\right)^3$

(*) Здѣсь при вѣромъ радикалъ поставленъ одинъ только знакъ, потому что въ семъ случаѣ довольно одной величины a .

превращающагося, первое въ $\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}$, а второе въ ...
 $\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, получу три величины x слѣдующія:

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}} \\ &\quad - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}} \\ x &= \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}} \\ &\quad + \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}}. \\ x &= \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}} \\ &\quad + \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}}. \end{aligned}$$

160. Разсматривая три сысканныя величины x , можно примѣнить, что пока p будетъ положительнымъ, количество $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ останется всегда положительнымъ; потому что $\frac{1}{4}q^2$, квадратъ изъ $\frac{1}{2}q$, долженъ быть и тогда положительнымъ, когда бы q было отрицательнымъ. Сие самое количество останется еще положительнымъ, когда $\frac{1}{4}q^2$ будетъ больше $\frac{1}{27}p^3$ съ отрицательнымъ знакомъ. Въ обоихъ случаяхъ два послѣдствія величины x должны быть мнимыя; ибо два кубическихъ радикала будутъ количества действительныя и равны, послѣ. въ произведеніяхъ своихъ на количества $\sqrt{(-3)}$ и $-\sqrt{(-3)}$ съ противоположными знаками не уничтожающагося взаимно; и сему останется нѣчто мнимое въ обоихъ послѣднихъ величинахъ x ; и слѣд. одна только первая величина x есть действительная.

161. Но когда p будетъ отрицательное, и при томъ $\frac{1}{27}p^3$ случится больше $\frac{1}{4}q^2$, тогда $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ будетъ количество отрицательное, а количество $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ мнимое; сего вѣтъ и три величины x остаются въ такомъ случаѣ всѣ действительными

Хотя нѣтъ ни малаго сомнѣнiя, что эти три корня будутъ дѣйствиельными; однако никто не могъ еще представить ихъ въ настоящемъ видѣ другимъ способомъ, кромѣ приближенiя. Сетъ случай, гдѣ употребляется способъ приближенiя, и о которомъ вскорѣ будемъ говорить, называюща не *приводимымъ случаемъ*.

Сдѣлаемъ примѣръ на первой случай.

Положимъ, что пребуется сысканъ корни въ экваци $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$; начинаю дѣйствiе уничтоженiемъ вѣсого члена, дѣлая $y = x - 2$, опъ чего она превращается въ $x^3 - 15x + 26 = 0$. Но мы представили всякую эквацию третьей степени безъ вѣсого члена чрезъ $x^3 + px + q = 0$; и чему p должно быть $= -15$, $q = 26$, и $\frac{1}{2}q = 13$; $\frac{1}{4}q^2 = 169$, $\frac{1}{3}p = -5$ и $\frac{1}{27}p^3 = -125$; сдѣл. $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{(169 - 125)} = \sqrt{44}$; и такъ три величины x произойдутъ слѣдующiя:

$$x = -\sqrt[3]{13 + \sqrt{44}} - \sqrt[3]{13 - \sqrt{44}}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt{44}} +$$

$$+ \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt{44}}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt{44}} +$$

$$+ \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 - \sqrt{44}}.$$

То есть первая оприцательная, а послѣднiя двѣ минимыя.

Приноровка для четвертой Степени.

162. Дабы употребить предыдущiй случай при ршенiи уравненiя четвертой степени, беру два дру-

гя $y^4 - 1 = 0$, и $y^3 + ay^2 + by + x = 0$. Умножаю последнее при разе сразу на y , вставляя при каждомъ умноженіи въ мѣсто y^4 величину его 1, опѣ чего происходятъ четыре экваціи въ y и въ x ; вывожу изъ трехъ первыхъ величины y^3 , y^2 и y , и вставляя ихъ въ четвертой, получаю эквацію четвертой степени въ x , которую потомъ сравниваю, какъ показано выше, съ общою экваціею четвертой степени.

163. Но рѣшеніе слѣдается еще легче, когда возьму два слѣдующія уравненія $y^2 - 1 = 0$, и $y(ax + b) + x^2 + c = 0$. Умноживъ последнее на y , и поставивъ въ мѣсто y^2 величину его 1, получу два другія:

$$\begin{aligned} y(ax + b) + x^2 + c &= 0 \\ y(x^2 + c) + ax + b &= 0 \end{aligned}$$

По вставкѣ во второе уравненіи величины y , взятой изъ первого, и по приведеніи всего, выйдетъ . . .

$$\begin{aligned} x^4 + 2cx^2 - 2abx + cc &= 0 \\ - ax^2 &- bb \end{aligned}$$

Когда сія эквація сравнится съ общою четвертой степени $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, то найдемъ, что $2c - aa = p$, $- 2ab = q$, $cc - bb = r$. Первое изъ трехъ сихъ уравненій даетъ $c = \frac{p+aa}{2}$, а второе $b = \frac{-q}{2a}$; по вставкѣ сихъ величинъ въ третье, выходятъ . . .

$$a^6 + 2pa^4 + (pr - 4r) a^2 - qq = 0.$$

Эквація, которая хотя и шестой степени, однакожъ рѣшилась на подобіе экваціи третьей степени, потому что содержитъ одинъ только степени a^2 .

И такъ сыскавши a^2 по правилу (159), опредѣлю попомъ a , b и c по уравненіямъ $b = \frac{-a}{2a}$, и $c = \frac{p + aa}{2}$. Напоследокъ по извѣстнымъ y , a , b и c разрѣшу эквацію $y(ax + b) + x^2 + c = 0$, и получу двѣ величины x ; а какъ эквація $y^2 - 1 = 0$, или $y^2 = 1$ содержитъ двѣ величины y , то есть, $y = 1$ и $y = -1$, то вставляя въ оныя сіи величины вмѣсто y , получу четыре корня x .

О соизмѣримыхъ Дѣлителяхъ уравненій.

164. Если между корнями экваціи должны находиться соизмѣримые дѣлители, то можно опредѣлить ихъ легче по слѣдующимъ наблюденіямъ и способу, нежели по общему рѣшенію сей экваціи.

165. Поелику послѣдній членъ всякой экваціи состоитъ изъ произведенія всѣхъ корней (148), то какое число не можешь прежде быть соизмѣримою величиною x , пока не будешь почнымъ дѣлителемъ послѣдняго члена. Слѣд. надлежитъ брать попеременно всѣхъ дѣлителей послѣдняго члена, и вставляешь ихъ въ экваціи вмѣсто x , то съ $+$, то съ $-$, (ибо x можешь имѣть положительныя и отрицательныя величины): тошъ дѣлитель, который поставленъ будучи въ уравненіи, превратится въ нуль, починается величиною x .

Но какъ такое дѣйствіе бываетъ часто продолжительнымъ, то мы имѣемъ замѣнить, какъ различать дѣлителей годныхъ оно имѣхъ, которыхъ не должно допускать; предложимъ напередо, какимъ образомъ находясь въ дѣлители данного числа.

166. Чтобы найти всѣхъ дѣлителей какого нибудь числа, должно прежде дѣлить его на первыя числа, начиная съ прѣсѣйшихъ, и продолжая дѣлить на одно число, пока можно. Послѣ чего написавъ въ особой строку всѣ сіи первыя числа и каждое столько разъ, сколько оно могло раздѣлится, умножь потомъ ихъ между собою по два, по три, по четыре и проч. Произведенія сіи, первыя числа и единица покажутъ всѣхъ искомыхъ дѣлителей.

На примѣръ желя сыскать всѣхъ дѣлителей 60, дѣлю 60 на 2; въ числѣ выходи 30; дѣлю 30 на 2, въ числѣ получаю 15; дѣлю 15 на 3, нахожу 5; напоследокъ дѣлю 5 на 5, и получаю 1. Такимъ образомъ первыми дѣлителями будутъ 2, 2, 3, 5; умножаю ихъ попарно, и нахожу 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Умножаю ихъ между собою по три, и нахожу 12, 20, 30, 30; наконецъ умножаю по четыре и получаю 60.

Такимъ образомъ всѣ дѣлители данного числа, за исключеніемъ имѣхъ, которые нѣсколько разъ повторяются, будутъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

167. Положимъ теперь, что требуется сыскать соизмѣримыхъ дѣлителей въ такой экваціи, которая ихъ имѣетъ, на примѣръ въ экваціи четвертой степени, изображенной вообще чрезъ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Представимъ сего дѣлителя чрезъ $x + a$; въ такомъ случаѣ можно принять (151) данное уравненіе за такое, которое произошло изъ умноженія $x + a$ на фактора третьей степени, на примѣръ $x^3 + kx^2 + mx + n$; слѣд. по умноженіи обоихъ сихъ факторовъ произойдетъ - - -

$$\begin{aligned} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an = 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx, \end{aligned}$$

Изъ сей экваціи, которая должна представлять тоже, что $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, происходятъ слѣдующія другія $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$; или $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, $k = \frac{q - m}{a}$, $1 = \frac{p - k}{a}$.

Допустимъ теперь, что a представляетъ одного изъ дѣлителей послѣдняго члена; а чтобы увѣриться, что можно принять его, то по замѣчанію предыдущихъ уравненій $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$ и проч. должно дѣлить

последній членъ даннаго уравненія на сего дѣлителя, частное вычепъ изъ коэффициента x , и остатокъ раздѣлить опять на того же дѣлителя; вычепъ сие второе частное изъ коэффициента x^2 , и остатокъ раздѣлить на того же дѣлителя; продолжая такое дѣйствіе до коэффициента вѣснорого члена экваціи, по раздѣленіи котораго въ частномъ должна вышши 1. Если взятой дѣлитель дѣлится вездѣ наравно, то безъ сумнѣнія можно принять его за a ; когдажъ хотя одно дѣленіе не выходитъ въ точности, то взятое число не годится.

Какъ единица дѣлится всякое число, то должно пробовать и ея какъ съ $+$, такъ и $-$; при томъ должно замѣнить, что лучше поставлать ее вдругъ въ данномъ уравненіи въ мѣсто x съ $+$ или $-$; такую вставку весьма легко дѣлать, потому что каждая степень изъ $+1$ есть $+1$, всякая четная степень изъ -1 есть $+1$, но не четная -1 . Когда изъ обѣихъ вставокъ ни одна не годится, то есть, ни одна не превращаетъ первой части экваціи въ нуль, тогда за a не можно принять ни $+1$, ни -1 .

Дѣлю, какъ выше, каждой остатокъ на соответствующей членъ первой строки, и пишу каждое частное въ низу; здѣсь пишу — 6.

Вычитаю каждое новое частное изъ коэффициента — 9 члена x^3 , и пишу ошибки въ низу; здѣсь пишу — 3.

Наконецъ дѣлю ошибки сіи на соответствующіе члены первой строки; здѣсь нахожу въ частномъ + 1; И такъ заключаю, что членъ — 3 первой строки соответствующій члену a , и слѣд. $x - 3$ представляеиъ дѣлителя $x + a$; но есмь, $x - 3$ дѣлитель остатка; слѣд. $x = 3$, и 3 будетъ сомнѣн- ной величиною количества x въ данномъ уравненіи.

*О способѣ подходить къ настоящимъ
корнямъ Сложныхъ уравненій чрезъ
Приближеніе.*

168. Подходя въ уравненіяхъ къ величинѣ неизвѣстнаго чрезъ способъ приближенія, которой теперь намѣрены изъяснить, предполагаемъ, что мы нашли уже величину сего корня близу одной десятой. Однакожъ посмотримъ, какъ сія первая величина находится. Возмемъ для примѣру уравненіе $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Въ семъ уравненіи на мѣсто x ставлю многія числа по сѣ положительныхъ, по сѣ отрицательныхъ знаками до нѣхъ перъ, пока двѣ мало между собою разнящіеся вставки выведунтъ два результата съ противоположными знаками. Нашлиши два числа такого свойства, заключаю, что величина x содержишся между ими; такъ что ежели оба числа разнятся

Сыскавши такимъ образомъ число, которое разнится меньше, чѣмъ на одну десятую отъ количества x , полагаю новымъ x разнымъ сему числу съ новымъ неизвѣстнымъ количествомъ z ; то есть, полагаю здѣсь $x = -2,6 + z$, и вставляю величину сію въ экваціи на мѣсто x ; но какъ z представляетъ не болѣе десятой части количества $2,6$, слѣд. квадратъ его не болѣе будетъ союой части квадрата того, а кубъ не болѣе одной тысячной, и такъ далѣе; почему опускаю въ второй вставку всѣ степени z , превосходящія первую; и дабы не дѣлать безполезныхъ выкладокъ, то при составленіи куба изъ $2,6 - z$ (и другихъ степеней, еслили онѣ случатся) опускаю только два первые члена, которые выходятъ по правилу. (126).

Дабы при вставкѣ находился порядокъ, то пишу, какъ явствуемъ здѣсь.

$$\begin{aligned} x^3 &= (-2,6 + z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6) \cdot z \\ - 5x &= -5(-2,6 + z) = -5(-2,6) - 5z \\ + 6 &= + 6. \end{aligned}$$

Соединивъ надлежащимъ образомъ члены сей вставки, получу въ результатъ $(-2,6)^3 + 3(-2,6) \cdot z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, или по совершеннѣйш означенныхъ дѣйствій и по приращеніи 15, 288

$$+ 1, 424 = 0; \text{ отсюда вывожу } z = -\frac{1,424}{15,28}, \text{ а по при-}$$

ращеніи сей дроби въ десятичныя $z = -0,09$ такому количеству, которое выходитъ изъ дѣленія не далѣе производимаго, какъ до первой значащей цифры. Вообще не должно продолжать дѣленія далѣе сколько нибудь значащихъ цифръ, сколько выходитъ мѣстъ между сего и первою цифрою прежней величины x ; заѣсть между 9 (то есть первую значащую цифру частнаго 0,09) и 2 (первою цифрою числа $2,6$) прежде найденной приближенной величины x находится одно мѣсто; почему и останавливаюсь на первой значащей цифрѣ 9.

И такъ величина x , именно $x = -2,6 + z$ превращается въ $x = -2,6 - 0,09$, то есть, въ $x = -2,69$.

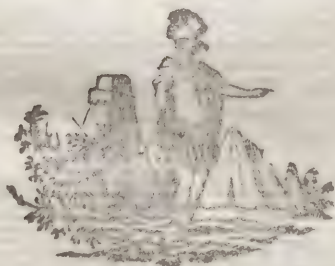
Желая же получить величину x точнѣе, полагаю
 $x = -2,69 + t$.

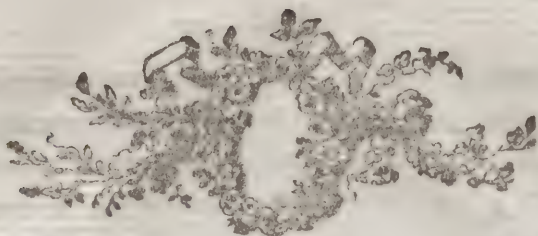
$$\begin{aligned} \text{Слѣд. получаю } x^3 &= (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 \cdot t \\ &- 5x = -5(-2,69) - 5t \\ &+ 6 = +6 \end{aligned}$$

По сгертненіи дѣлѣній и по приведеніи буду
 имѣть $-0,015109 + 16,783t = 0$; отсюда вывожу $t =$
 $\frac{0,015109}{16,783}$, а въ десятичныхъ $t = 0,000904$.

Почему величина x , то есть, $x = -2,69 + t$
 превращенія снова въ $x = -2,69 + 0,000904 =$
 $-2,689096$.

Если нужно подойти къ настоящей величинѣ
 еще ближе, то должно сдѣлать $x = -2,689096 + u$,
 и поступать, какъ выше.





ВТОРОЕ ОТДѢЛЕНІЕ,

*Въ которомъ показывается Примѣненіе
Алгебры къ Ариметикѣ и Геометріи.*

169. **П**о представленіи всеобщимъ образомъ
каждаго извѣстнаго и неизвѣстна-
го количествъ, заключающихся въ вопросѣ
и по изображеніи всѣхъ его условій уравне-
ніями, можно оставить вопросъ и занимать-
ся одними уравненіями и примѣненіемъ при-
личныхъ имъ правилъ. Тогда для всякаго,
кто обнялъ и въ твердой памяти содержитъ
все, что сказано было о знакахъ и о раз-
положеніи буквъ, каждое уравненіе стано-
вится книгою, въ которой онъ читаетъ по-
нятно различныя отношенія совокупленныхъ
количествъ. Онъ можетъ разную приоров-
кою правилъ, изъясненныхъ въ предыдущемъ
отдѣленіи, давать уравненіямъ новыя виды,
подъ которыми отношенія становятся еще
понятнѣе. Словомъ, онъ можетъ почитать

ихъ залогомъ всѣхъ свойствъ практуемыхъ количествъ и общихъ рѣшеній множества другихъ вопросовъ, коихъ прежде не было въ виду, и которыя наконецъ являясь сближаются съ начальнымъ.

Поелику правила, по которымъ сыскиваются величины неизвѣстныхъ, пребываютъ всѣ вообще, чтобъ каждое неизвѣстное количество занимало въ уравненіи особую часть, а всѣ прочія находились бы въ другой; и какъ припомъ правила сіи служатъ неизключительно для всякаго количества, содержащагося въ уравненіи, то можно, слѣдуя по онымъ, ставить въ первой его части каждое, а во второй прочія, и рѣшить какъ бы такой вопросъ, въ которомъ всѣ послѣднія количества становятся извѣстными, а неизвѣстнымъ одно первое. Изъ сего слѣдуетъ, что одно уравненіе рѣшить столько разныхъ вопросовъ, сколько въ немъ заключается разныхъ количествъ. Сдѣлаемъ истинну сего чувствительнѣе и понятнѣе примѣрами.

Общія свойства Арифметическихъ Прогрессій.

170. Мы видѣли (Ариф. 190), что всякой членъ возрастающей Арифметической

прогрессіи состоитъ изъ перваго, сложеннаго съ разностію, взятою сполько разъ, сколько находится членовъ до искомаго.

И такъ еслии представимъ чрезъ a числовую величину перваго члена, чрезъ u величину искомаго, чрезъ d разность, и наконецъ чрезъ n число всѣхъ членовъ; въ такомъ случаѣ $n - 1$ изобразитъ число членовъ предшесствующихъ до u , и данное предложение переведено будетъ на Алгебраической языкъ слѣдующимъ уравненіемъ $u = a + (n - 1) d$. Сіе уравненіе разрѣшаетъ такой вопросъ, которымъ требуется по извѣстнымъ въ прогрессіи Ариѳметической разности d , числу членовъ n и величинѣ a , опредѣлить величину послѣдняго члена u .

Но какъ сіе уравненіе заключаетъ въ себѣ четыре количества, то утверждаю, что оно разрѣшаетъ четыре общія вопроса; именно. . . .

1°. Еслии принявъ a за неизвѣстное, буду искать величину его, то получу по правиламъ перваго отдѣленія $a = u - (n - 1) d$. Сія эквація показываетъ, что для опредѣленія перваго члена возрастающей Ариѳметической прогрессіи надлежитъ изъ послѣдняго члена u вычесть разность d ,

взяшую $n - 1$ разв, то есть, разность, взяшую столько разв, сколько находится всѣхъ членовъ безъ единицы.

2°. Еслии буду искать n , какъ неизвѣстное, то извѣ экваци $u = a + (n - 1)d$, которая есть одинакова съ $u = a + nd - d$, выведу по переставкѣ въ ней членовъ $nd = u - a + d$, а по раздѣленіи $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$; сія послѣдняя показываетъ, что для опредѣленія числа членовъ, (положивъ, что первой членъ a , послѣдній u и разность d Арифметической прогрессіи извѣстны), должно первой членъ вычесть изъ послѣдняго, остатокъ раздѣлить на разность d и къ частному прибавить единицу. На примѣрѣ еслии первой членъ будетъ данъ 5, послѣдній 37, а разность 2; то вычту 5 изъ 37, и остатокъ 32 раздѣлю на разность 2, въ частномъ произойдетъ 16; къ 16 приложу 1, и получу 17 за число членовъ прогрессіи.

3°. Наконецъ въ экваци $u = a + (n - 1)d$ принявши d за неизвѣстное, опредѣлю его такимъ образомъ. Вопервыхъ по переставкѣ членовъ выведу эквацию $(n - 1)d = u - a$, а по раздѣленіи на $n - 1$

сѣдующую другую, $d = \frac{n-a}{n-1}$; сїя послѣдняя научаетъ, что для опредѣленія разности, находящейся въ прогрессіи, коей первой членъ, послѣдній и число членовъ извѣстны, должно вычесть первой изъ послѣдняго и раздѣлить остатокъ на число членовъ безъ единицы. Сіе правило есть тоже самое, какое мы предписали (Ариѳ. 193) для сысканія извѣстнаго числа среднихъ пропорціональныхъ членовъ между двумя данными количествами.

И такъ одна сїя эквація $n = a + (n-1)d$ заключаетъ въ себѣ рѣшеніе четырехъ особенныхъ вопросовъ; и слѣд. по тремъ извѣстнымъ какимъ нибудь членамъ изъ четырехъ, кои суть первой членъ, послѣдній, число членовъ и разность прогрессіи Арифметической, можно опредѣлить всегда четвертый.

171. Всякое другое свойство, выраженное общимъ образомъ, можетъ рѣшить сколько различныхъ вопросовъ, сколько находящіяся членовъ въ разсматриваемомъ свойствѣ.

На примѣрѣ между свойствами Арифметическихъ прогрессій находится еще и такое, въ копорѣмъ для опредѣленія суммы всѣхъ

членовъ Арифметической прогрессіи должно сложить первый ея членъ съ послѣднимъ, и сумму умножить на половину числа членовъ.

Почему для опредѣленія суммы ста первыхъ членовъ въ прогрессіи $\div 1. 3. 5. 7$ и проч., которой сошымъ служимъ 199; сложу послѣдній членъ 199 съ первымъ 1, и сумму 200 умножу на 50, то есть, на половину 100 числа членовъ, и получу 10000 за сумму ста первыхъ нечетныхъ чиселъ.

Мы докажемъ потчасъ свойство сіе; а дабы не упустить изъ виду своего предмета, то удержавъ прежнія названія количествъ, представимъ припомъ чрезъ s сумму всѣхъ членовъ; слѣд. объявленное свойство изобразится Алгебраически такимъ образомъ:

$$s = (a + u) \times \frac{n}{2}.$$

Сіе уравненіе приводитъ насъ въ состояніе рѣшить слѣдующій общій вопросъ, заключающій въ себѣ четыре другіе. По тремъ даннымъ какимъ нибудь членамъ изъ четырехъ, кои суть первой, послѣдній, число членовъ и сумма всѣхъ членовъ прогрессіи Арифметической, найти четвертой.

Ибо 1°. по известнымъ a , u и n можно непосредственно опредѣлить въ предыдущемъ уравненіи величину s .

2°. Еслии по известнымъ a , u и s должно опредѣлить n , то уничтоживъ въ экваціи $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ дѣлителя 2, получишь $2s = (a + u) \times n$, или $(a + u) \times n = 2s$; потомъ раздѣливъ на $a + u$ получишь $n = \frac{2s}{a + u}$ уравненіе, въ которомъ n становится известнымъ, потому что количества a , u и s , составляющія величину его, предполагаются данными.

3° и 4°. Еслии наконецъ по известнымъ a , s и n , или u , s и n надобно узнать величины u или a , то взявъ опять тожъ уравненіе $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, уничтожь въ немъ дробь, чрезъ что получишь $2s = (a + u) n$; сіе послѣднее, раздѣленное на n , представитъ $a + u = \frac{2s}{n}$, изъ котораго не трудно вывести $u = \frac{2s}{n} - a$, и $a = \frac{2s}{n} - u$ искомыхъ двѣ величины.

Приступимъ теперь къ доказательству предположеннаго свойства.

Нѣтъ нималого сумнѣнія, что мы не переставая предпачаяшь чрезъ a первой членъ, а чрезъ d разность, можемъ изобразить всякую Арифметическую возрастающую прогрессію въ такомъ видѣ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d$ и проч. Вообразимъ теперь, что полъ сею Арифметическою прогрессіею поставлена та же самая прогрессія, только въ прошивномъ видѣ, именно такъ:

$$\begin{aligned} & \div a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d \\ & \div a + 6d, a + 5d, a + 4d, a + 3d, a + 2d, a + d, a \end{aligned}$$

Поелику обѣ сіи прогрессіи равны между собою, то явствуетъ, что сумма членовъ каждой состоить изъ полсуммы обѣихъ; но обративъ вниманіе на сіи прогрессіи, примѣтимъ, что каждая два сходственныхъ ихъ члена дѣлають вездѣ и должны дѣлать одинаковую сумму, и что при томъ сія сумма есть та же, какая находится между первымъ и послѣднимъ членомъ первой прогрессіи; изъ сего должно заключить, что для опредѣленія цѣлости или суммы всѣхъ членовъ обѣихъ этихъ прогрессій надлежитъ сложить первой членъ какой нибудь одной съ послѣднимъ, и сумму умножить на число членовъ; слѣд. для опредѣленія суммы всѣхъ членовъ одной какой нибудь прогрессіи должно

въ сходственность сего умножишь сум-
му перваго члена съ послѣднимъ на полови-
ну числа членовъ.

172. И такъ рѣшенныя нами восемь
общихъ вопросовъ основываются единствен-
но на двухъ правилахъ или свойствахъ, по-
казанныхъ (170 и 171); а какъ припомъ
рѣшеніе ихъ выводится непосредственно изъ
двухъ уравненій, кои представляютъ собою
ни что другое, какъ Алгебраической пере-
водъ объявленныхъ двухъ свойствъ, то яв-
ствуешь, какъ помощію Алгебры можно из-
влекать изъ одного источника всѣ заклю-
чающіяся въ немъ истинны.

Хотя не всѣ изъ этихъ свойствъ одина-
ково полезны, однакожъ будучи весьма легки
и просты, дѣлають понятнѣе употребленіе
уравненій; и для того принявъ ихъ опять
въ разсужденіе, будемъ объяснять употреб-
леніе сіе.

Въ предыдущихъ разсужденіяхъ разма-
тривали мы въ особенности одно только ура-
вненіе; но еслили случится между двумя
или большимъ числомъ уравненій, изобра-
жающихъ различныя свойства какихъ нибудь
количествъ, такія, кошорыя заключа-
ють въ себѣ нѣкоторыя изъ тѣхъ коли-

чествъ общими, по можно въ такомъ случаѣ вывести еще множество другихъ свойствъ. На примѣрѣ двѣ главныя экваціи для Арифметическихъ прогрессій, именно $u = a + (n - 1)d$ и $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ заключающія въ себѣ при общія количества a , u и n . Ибо извлеки изъ каждого уравненія величину какого нибудь изъ сихъ трехъ количествъ, и сравнивъ потомъ обѣ величины ихъ между собою, получимъ новую эквацію, въ которой одного общаго количества не будетъ находиться больше, и которая изобразитъ отношеніе четырехъ прочихъ независимо отъ исключеннаго. На примѣрѣ выводя въ каждомъ уравненіи величину a , найду, что $a = u - (n - 1)d$, и $a = \frac{2s}{n} - u$; потомъ сравнивъ ихъ между собою, получу $u - (n - 1)d = \frac{2s}{n} - u$ такую эквацію, въ которой принимая попеременно u , n , d и s за неизвѣстныя, найду, какъ выше, новыя общія свойства прогрессій Арифметическихъ. На примѣрѣ принявъ s за неизвѣстное, получу $s = \frac{2nu - n \cdot (n - 1)d}{2}$ такое уравненіе, которое представитъ сумму Арифметической прогрессіи посредствомъ послѣдняго члена, разности и числа членовъ; потому что вторая часть сего уравненія со-

стоитъ только изъ сихъ трехъ извѣстныхъ количествъ.

Еслии вмѣсто a уничтожено будетъ n или n , то при каждомъ уничтоженіи произойдетъ новое уравненіе, содержащее въ себѣ четыре только количества изъ пяти a , n , n , d , s ; и слѣд. принимая попеременно каждое изъ сихъ четырехъ количествъ за неизвѣстное, можно изъ всякаго новаго уравненія вывести по четыре новыя формулы, которыя послужатъ различными изображеніями количествъ a , n , n , d , s ; каждое изображеніе сіе имѣетъ особенную пользу, глядя по вопросу, какія будутъ даны количества въ Арифметической прогрессіи. На примѣръ для опредѣленія суммы всѣхъ членовъ Арифметической прогрессіи, въ которой извѣстны первой членъ, разность и число членовъ, надлежитъ уничтожить n , потому что послѣдній членъ прогрессіи не данъ; отъ чего произойдетъ эквація, заключающая въ себѣ четыре только сіи количества a , n , d и s , по которымъ s удобно опредѣлился.

Заклучимъ изъ сего, что два уравненія $n = a + (n - 1)d$ и $s = (a + n) \frac{n}{2}$ рѣшатъ всѣ вопросы, относящіеся къ Арифметическимъ прогрессіямъ, и въ коихъ непо-

средственно известны при изв пяти количествъ a, u, n, d, s .

173. Для показанія употребленія сихъ правилъ, положимъ, что требуется узнать число ядеръ, находящееся въ основаніи треугольной кучи.

Не трудно понять, что число ядеръ, содержащееся въ каждомъ параллельномъ ряду съ какимъ нибудь бокомъ основанія кучи, уменьшается постепенно единицею, и число рядовъ равно числу ядеръ, помѣщающемуся на какой нибудь сторонѣ тогожъ основанія. И такъ представивъ число сіе чрезъ n , получимъ искомое число ядеръ въ суммѣ Арифметической возрастающей прогрессіи такой, коей первый членъ будетъ единица, послѣдній n , и число членовъ также n ; сумма сія изобразится чрезъ $(n + 1) \times \frac{n}{2}$. На примѣръ вступимъ спорова даннаго основанія заключаетъ въ себѣ 6 ядеръ, но вся сумма ядеръ составитъ изв 21.

Помощію сего же правила, относящагося къ производству членовъ Арифметической прогрессіи, можно сыскать площадь всякой трапеціи или треугольника. Ибо вообразивъ высоту трапеціи раздѣленною параллельными линіями съ основаніемъ на безчисленное множество равныхъ частей, не трудно понять, что сама она раздѣлена будетъ на безчисленное множество маленькихъ другихъ трапецій, которыя будучи проспираться къ одной сторонѣ, постепенно увеличиваясь. Слѣд. чтобы опредѣлить число всѣхъ сихъ трапецій (171), споемъ сложить между собою двѣ крайнія, и сумму ихъ умножить на половину всего числа ихъ; но какъ трапеціи сіи имѣютъ безконечно малыя высоты, то площадь каждой можно почитать состоящею изв основанія ея, умноженного на высоту. И такъ представивъ основанія двухъ крайнихъ трапецій чрезъ B и b , общую высоту ихъ чрезъ h и число частей двѣлой высоты чрезъ n , можно искомую площадь изобразить чрезъ $\frac{Bh + bh}{2} \times n$ или чрезъ $\frac{B+b}{2} \times nh$; но nh представляетъ высоту данной большой тра-

пеціи, слѣд. для сысканія площади ея должно умножить половину суммы двухъ противоположенныхъ оснований на высоту.

О сысканіи Суммы степеней тленовъ всякой Арифметической Прогрессіи.

174. Положимъ, что a, b, c, d и проч. представляютъ многія числа въ Арифметической прогрессіи, которой разность пусть будетъ r . И такъ

1^е. Получимъ $b = a + r, c = b + r, d = c + r, e = d + r$.

2^е. По составленіи квадратовъ, получимъ

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$

$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$

$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$

$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2.$$

3^е. По составленіи кубовъ, получимъ

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$

$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$

$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$

$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Если теперь сложены будутъ между собою квадратныя уравненія, потомъ куби-

ческія, то произойдетъ изъ такого сложения по приведеніи равныхъ и подобныхъ членовъ, находящихся въ различныхъ частяхъ.

1^е. $e^3 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^3$, или $e^3 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^3$. Изъ сего явствуетъ, что означивъ вообще число количествъ a, b, c, d и проч. чрезъ n , послѣднее чрезъ u , и сумму всѣхъ сихъ количествъ чрезъ s' , можно вывести $u^3 = a^2 + 2r(s' - u) + (n - 1)r^2$, потому что $2r$ умножено въ вышеозначенной эквации на всѣ количества a, b, c и проч. безъ послѣдняго, и r^2 сложено само съ собою столько разъ, сколько находится всѣхъ уравненій, то есть, столько разъ безъ единицы, сколько находится всѣхъ количествъ a, b, c и проч; но какъ послѣднее уравненіе сіе заключаетъ s' , то безъ всякаго труда можно вывести величину его, и слѣд. изображеніе суммы всѣхъ членовъ въ Арифметической прогрессіи. Сія величина s' представлена будетъ въ слѣдующемъ видѣ . . .

$$s' = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)r^2}{2r} + u.$$

2^е. Если сложены будутъ равномѣрно кубическія уравненія, то по приведеніи равныхъ и подобныхъ количествъ, заключающихся въ разныхъ частяхъ, произойдетъ:

$$e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3.$$

То есть, $e^3 = a^3 + 3r (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2 (a + b + c + d) + 4r^3.$

Изъ уравненія сего можно видѣть, что количество умножающее $3r$, состоить изъ суммы квадратовъ всѣхъ членовъ безъ послѣдняго; что количество умножающее $3r^2$ представляетъ сумму всѣхъ количествъ безъ послѣдняго; что наконецъ кубъ r^3 сложенъ самъ съ собою столько разъ, сколько находится уравненій; и слѣд. означивъ вообще сумму квадратовъ чрезъ s'' , послѣдній членъ чрезъ u , получимъ $u^3 = a^3 + 3r (s'' - u^2) + 3r^2 (s' - u) + (n - 1) r^3.$

И такъ узнавши въ прогрессіи первой членъ, послѣдній, разность и число членовъ, можно помощію сей экваціи опредѣлить величину s'' , то есть, сумму квадратовъ, поелику количество s' найдено выше. Почему вставивъ въ мѣсто s' величину его, выведу уравненіе $u^3 = a^3 + 3r (s'' - u^2) + 3r^2 \left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2} \right) + (n-1)r^3$, или $2u^3 = 2a^3 + 6rs'' - 6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3 \cdot (n-1) \cdot r^3 + 2 \cdot (n-1) \cdot r^3$, а

изъ сего по совершеніи надлежащихъ дѣй-
ствій $s'' = \frac{2n^3 - 2a^3 + 3ra^2 + 3ra^2 + (n-1)r^3}{6r}$.

Если составивъ изъ уравненій $b = a + r$, $c = b + r$ и проч. четвертыя степени, сложимъ ихъ, и поимъ станемъ практовать такимъ же образомъ, то получимъ сумму кубовъ. По тѣмъ же правиламъ поступая, найдемъ сумму членовъ прочихъ вышнихъ степеней.

Когда Арифметическая прогрессія предположена будетъ въ натуральномъ порядкѣ чиселъ, начинающихся съ единицы, именно такая 1, 2, 3 и проч.

Тогда произойдетъ $a = 1$, $n = n$; ибо вообще $n = a + (n - 1)r$, что въ настоящемъ случаѣ превращается въ $n = 1 + n - 1 = n$. Слѣд. величина s'' должна изобразиться въ такой прогрессіи чрезъ $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, то есть, чрезъ $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = n \times \dots \times \frac{(n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$.

175. Для показанія практическаго употребленія сихъ правилъ, положимъ, что требуется узнать число ядеръ, заключающееся въ квадратно-пирамидальной кучѣ, которой число ядеръ бока основанія извѣстно. Нѣтъ ни малаго сомнѣнія, что сія куча состоитъ

изъ нѣсколькихъ рядовъ параллельныхъ съ основаніемъ, и припомъ такихъ, которые съ низу на верхъ постепенно уменьшаются единицею. Слѣд. сумма всѣхъ ядеръ должна состоять изъ суммы квадратовъ натуральныхъ и ряда чиселъ, проспирающагося до количества n , означающаго число ядеръ бока основанія, и изобразится чрезъ $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$; то есть,

для опредѣленія числа ядеръ всей кучи должно послѣдовать по сему правилу: къ числу ядеръ бока основанія и къ удвоенному ему придай по единицѣ; умножь обѣ суммы между собою и произведеіе опять на тоже число ядеръ бока; наконецъ изъ послѣдняго сего произведеія возьми шестую часть. На примѣрѣ: еслили квадратно-пирамидальная куча будетъ заключать въ боку основанія своего 6 ядеръ, то придавъ къ 6 и къ удвоенному ему 12 по 1, получу 7 и 13, которые умножены будучи между собою, дадутъ въ произведеніи 91; произведеіе сіе умножу еще на 6; онъ чего произойдетъ 546, коего шестая часть 91 покажетъ число ядеръ всей кучи.

Еслили основаніе пирамидальной кучи будетъ занимать не квадратъ, но параллелограммъ, то должно въ такомъ случаѣ вообразишь ее раздѣленною на двѣ части такія (фиг. 2), изъ которыхъ бы одна представляла квадратную пирамиду, о какой мы рассуждали выше, а другая призму. Для изчисленія ядеръ, заключающихся въ сей призмѣ, должно умножить число ихъ, находящееся въ треугольникѣ СЕН, на число ядеръ бока СВ или АВ — 1.

176. И такъ по изъясненному (173), положивъ m за число ядеръ верхняго бока АВ, получимъ въ $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} + n \cdot \frac{n + 1}{2} \cdot (m - 1)$ количество, представляющее число всѣхъ ядеръ продолговатой кучи. Но сіе количество $= n \cdot \frac{n + 1}{2} \times \left(\frac{2n + 1}{3} + m - 1 \right) = n \cdot \frac{n + 1}{2} \left(\frac{3m + 2n - 2}{3} \right) = n \cdot \frac{n + 1}{2} \dots$
 $\left(\frac{m + 2(m + n - 1)}{3} \right).$

Часть III.

Н

А какъ явствуетъ, что $n + n - 1$ изображаетъ число ядеръ длинника кучи DF, или параллельнаго ему GI, то должно заключить, что для опредѣленія числа ядеръ въ продолговатой кучѣ, должно умножить число ядеръ треугольной ея стороны на третью сумму трехъ параллельныхъ длинниковъ.

И такъ положивъ, что самый меньшей длинникъ (*) АВ содержишь въ себѣ 21, а бокъ треугольнаго основанія 8, заключаю, что два прочіе параллельные длинника состоятъ каждой изъ $21 + 8 - 1$, или изъ 28, и поступаютъ какъ слѣдуетъ . . .

Бокъ треугольнаго основанія	8
по прибавленіи 1	9
Треугольная сторона, или половинное произведеніе	36
Сумма шрехъ длинниковъ	77
Число всѣхъ ядеръ (третье произведеніе)	924.

177. Явствуетъ изъ Геометріи, что площадь всякой пирамиды или конуса состоитъ изъ умноженія площади основанія ея на третью высоты. Сію истину можно доказать также выведенною для суммы квадратовъ формулою; но замѣнимъ напередъ,

$$\text{что естьли въ формулѣ } s'' = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

число членовъ n предположено будетъ безконечнымъ, то она должна превратиться въ другую такую $s'' = \frac{n^3}{3}$, или по причинѣ, что $n = n$ (какъ мы то видѣ-

ли выше), $s'' = \frac{n^2 n}{3} = n^2 \cdot \frac{n}{3}$. Въ самомъ дѣлѣ предполагая n безконечнымъ количествомъ, должно предположить также, что никакое опредѣленное количество не можешь увеличить его; почему въ настоящей выкладкѣ для показанія того, что заключаешь въ себѣ означенное предположеніе, должно по необходимости починать $n + 1$ и n за одно, также $2n + 1$ и $2n$ за одинакія или равныя количества; послѣ чего

(*) Здѣсь подъ словомъ длинникъ разумѣется то, что Французы называютъ *Arête*.

формула $s'' = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ превращается въ

$$s'' = \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}, \text{ или } s'' = u^2 \cdot \frac{n}{3}, \text{ по вставкѣ } u^2 \text{ вмѣсто } n^2.$$

Доказали мы въ Геометріи (Геом. 202), что во всякой пирамидѣ, раздѣленной на слои, параллельные съ основаніемъ ея, слои содержатся между собою, какъ квадраты разстояній ихъ отъ верху. И такъ вообразивъ цѣлую высоту пирамиды раздѣленную на безчисленное множество равныхъ частей, заключимъ, что разстоянія слоевъ должны имѣти въ прослой прогрессіи чиселъ, а сами слои въ квадратномъ содержаніи ихъ; слѣд. сумма слоевъ найдется такимъ же образомъ, какъ сумма квадратовъ;

а какъ по формулѣ $s'' = u^2 \cdot \frac{n}{3}$ должно умножить послѣдній изъ квадратовъ на шестъ всего числа ихъ; слѣд. для полученія суммы всехъ слоевъ, должно умножить послѣдній изъ нихъ, то есть, основаніе пирамиды на шестъ числа слоевъ, то есть, на шестъ высоты пирамиды.

178. Узнавши находить сумму степеней многихъ чиселъ въ Арифметической прогрессіи, не трудно узнать, какъ находить оную и въ разныхъ другого рода прогрессіяхъ. На примѣрѣ, еслии въ Арифметической прогрессіи + 3. 7. 11. 15. 19 и проч. сложишь члены послѣдовательно между собою, то произойдетъ такой рядъ членовъ: 3, 10, 21, 36, 55 и проч., коихъ сумму опредѣлить возможно. Еслии члены и сего порядка сложены будутъ такимъ же образомъ, то про-

изойдетъ новой рядъ чиселъ : 3 , 13 , 34 , 70 , 125 и проч. котораго сумму также опредѣлить можно ; поступая равномерно съ членами сего порядка и проч. заключенія выведетъ одинакія.

Поелику сумма членовъ Арифметической прогрессіи была выше представлена чрезъ $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, то по вставкѣ величины u , то есть, $u = a + r \cdot (n - 1)$, она превращается въ $s = [2a + r \cdot (n - 1)] \times \frac{n}{2}$. Сія послѣдняя величина s изображаетъ всякой членъ втораго порядка. Такимъ образомъ для опредѣленія суммы членовъ сего втораго порядка, надлежитъ сыскать оную въ порядкѣ количествъ $[2a + r \cdot (n - 1)] \cdot \frac{n}{2}$, поставляя въ мѣсто n попеременно числа натуральной прогрессіи 1 , 2 , 3 и проч. А какъ сей порядкъ количествъ перемѣняется въ $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, въ которомъ a и r остаются одинаковы, какая бы величина ни была принята въ мѣсто n , то слѣдуетъ, что для сысканія суммы количествъ представленныхъ чрезъ an , надлежитъ опредѣлить оную въ количествахъ изображенныхъ чрезъ n , и умножить потомъ сумму сію на a ; сумма же количествъ представленныхъ

чрезъ n , есть сумма чиселъ Арифметической прогрессіи въ натуральномъ порядкѣ. Тоже разсужденіе служитъ для $\frac{r}{2}n$. Что принадлежитъ до суммы $\frac{r}{2}n^2$, то надлежитъ сыскать оную въ количествахъ представленныхъ чрезъ n^2 , потому что r остается и здѣсь одинаково, какое бы число ни было принято въ мѣсто n , то есть, надлежитъ взять сумму квадратовъ натуральныхъ чиселъ, и умножить ее на $\frac{r}{2}$. И такъ сумма количествъ an изобразится чрезъ $a \cdot (n+1)$. $\frac{n}{2}$; сумма количествъ $\frac{r}{2}n$ чрезъ $\frac{r}{2} \cdot (n+1)$. $\frac{n}{2}$, и напоследокъ сумма количествъ $\frac{r}{2}n^2$ чрезъ $\frac{r}{2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$; слѣд. сумма количествъ $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, или сумма членовъ второго порядка сдѣлается въ такомъ случаѣ равна $a \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2} + \frac{r}{2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{r}{2} \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2}$, или по приведеніи $a \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2} + r \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$; а какъ каждый членъ третьяго порядка состоитъ изъ суммы членовъ второго, то для сысканія суммы третьяго порядка надлежитъ находить оную въ различныхъ частяхъ послѣдняго сего результата, что можно сдѣлать

опредѣленіемъ суммы степеней чиселъ натурального порядка. Еслили положимъ $a = 1$, и $r = 1$, то есть, что начальная прогрессія состоятъ изъ порядка натуральныхъ чиселъ, то прочія прогрессіи, о которыхъ теперь рѣчь идетъ, будутъ изображать *фигурныя числа*.

Можно по этимъ правиламъ находить сумму членовъ и такихъ порядковъ, которые происходятъ изъ сложения порядка квадратовъ, или кубовъ и проч.; словомъ которые происходятъ изъ сложения порядка членовъ всякой совершенной степени, хотя бы при томъ сіи степени были умножены на какія угодно извѣстныя числа.

Изъ изъясненнаго теперь можно вывести способъ, какъ опредѣлять число ядеръ въ треугольно - пирамидальной кучѣ; поелику въ ней всѣ ряды ядеръ параллельны съ основаніемъ, то каждой изъ нихъ долженъ (173) изобразиться чрезъ $n, \frac{n+1}{2}$. Слѣд. число всѣхъ ядеръ будетъ состоять изъ суммы количествъ $n \times \frac{n+1}{2}$; а какъ въ величинѣ сей суммы, найденной выше, $r = 1$ и $a = 1$, то искомое число ядеръ слѣд. слагается послѣ сего равно $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$; но изъ послѣдняго сего изображенія выводимъ самое простое правило.

179. И на оборотъ, еслили по извѣстному числу ядеръ всякой треугольной кучи, потребуешь узнать число n ядеръ каждаго ея длинника (arête); то представивъ въ такомъ случаѣ чрезъ a все число ихъ, получишь $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} = a$ или $n^3 + 3n^2 + 2n =$

ба эквацию, которую рѣши по предписанному (159) правилу. Можно еще рѣшить ее скорѣе такъ: замѣтивъ, что $n^3 + 3n^2 + 2n$ представляетъ количество меньше куба составленнаго изъ $n + 1$, заключи, что кубическій корень изъ ба долженъ быть меньше $n + 1$; по той же причинѣ $n^3 + 3n^2 + 2n$ представляетъ количество больше куба изъ $n - 1$, слѣд. кубическій корень изъ ба долженъ быть больше $n - 1$; а какъ n должно состоять изъ цѣлаго числа, то кубическій корень изъ ба не можетъ разниться съ n естествомъ, и слѣд. n будетъ кубическій корень самаго большаго куба, заключающагося въ ба.

Еще бы случилось искать тоже самое въ квадратной кучѣ, то получимъ (175) такое уравненіе

$$n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}, \text{ или } \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = a, \text{ или } n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 3a, \text{ о которомъ разсуждая, какъ выше, заключимъ, что количество } n \text{ должно представлять корень самаго большаго куба, содержащагося въ } 3a.$$

О свойствахъ и употребленіи Геометрическихъ Прогрессій.

180. Для сысканія суммы членовъ Геометрической прогрессіи можно вывести сходственные правила съ предыдущими.

Положимъ, что a, b, c, d, e и проч. представляютъ члены какой нибудь Геометрической возрастающей прогрессіи, коюрой q служитъ знаменателемъ содержанія. А какъ извѣстно, что каждой членъ въ сей прогрессіи содержитъ q разъ свой предыдущій, то вывожу слѣдующія уравненія $b = aq, c = bq, d = cq, e = dq$ и проч. По

сложеніи сихъ уравненій получаю $b + c + d + e = (a + b + c + d) q$, и заключаю, что вообще первая часть новаго сего уравненія должна состоять изъ суммы всѣхъ членовъ безъ перваго, а вторая изъ знаменателя содержанія, умноженнаго на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣдняго. Слѣд. представивъ чрезъ s сумму всѣхъ членовъ, чрезъ u послѣдній, перемѣню эквацию въ $s - a = (s - u) q$, или $s - a = qs - qu$; изъ послѣдней вывожу $qu - a = qs - s = (q - 1) s$, и слѣд. $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ формулу, по которой зная первой членъ a , послѣдній u и знаменателя содержанія q , можно опредѣлить сумму s всѣхъ членовъ.

Сія формула служитъ также и для умаляющихся прогрессій, потому что умаляющіяся прогрессіи, взятыя въ обратномъ порядкѣ, становятся возрастающими; и слѣд. вся перемѣна должна состоять въ противномъ названіи *перваго* и *послѣдняго* членовъ.

Еслили умаляющаяся прогрессія простирается въ безконечность, то сумма s превращается въ такомъ случаѣ въ $s = \frac{qu}{q - 1}$, u означаетъ здѣсь первой членъ. Въ самомъ дѣлѣ для показанія въ исчисленіи такого

предположенія, надлежитъ предсавить себѣ послѣдній членъ безпредѣльно малымъ такъ, что онъ въ разсужденіи *qu* долженъ быть нуль или ничто.

Слѣдуетъ изъ сказаннаго, что для опредѣленія суммы всѣхъ членовъ Геометрической прогрессіи, должно умножить самой большой ея членъ на знаменателя (*) содержанія, изъ произведенія вычесть самой меншой, и остатокъ раздѣлить на знаменателя содержанія, уменьшеннаго единицею. Для сысканія же суммы членовъ въ прогрессіи, умаляющейся въ безконечность, надлежитъ умножить самой большой членъ ея на знаменателя содержанія, и произведение раздѣлить на того же знаменателя безъ единицы.

Такимъ образомъ сумма членовъ сей прогрессіи, продолжающейся въ безконечность $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ и проч. состоитъ изъ $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2-1}$, или изъ 1; такая же сумма членовъ выходитъ и въ другой слѣдующей $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81}$ и проч. коей знаменатель, принимая ее за возрастающую, есть 3, потому что частное изъ раздѣленія $\frac{2}{3}$ на $\frac{2}{3}$ равно 3; слѣд. сумма сія будетъ въ самомъ дѣлѣ состоятъ изъ $\frac{\frac{2}{3} \times 3}{3-1}$, или по приведеніи

(*) Чрезъ знаменателя содержанія разумѣется здѣсь вообще то, сколько разъ какой нибудь членъ прогрессіи содержитъ въ себѣ другой ближайше меншой. Такое понятіе должно относить какъ до возрастающихъ, такъ и умаляющихся прогрессій.

изъ 1. Вообще сумма членовъ всякой Геометрической прогрессіи, умяляющейя въ безконечность, ксей каждой членъ имѣетъ одинаковаго числителя и при томъ такого, которой меньше единичею знаменателя перваго члена, равняется 1. Ибо такая прогрессія

изображается вообще чрезъ $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \dots$

$\frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4}$ и проч., ксей сумма равна \dots

$\frac{n}{n+1} \times (n+1)$
 $\frac{n}{n+1-1}$, или $\frac{n}{n}$, то есть, 1.

181. Сказано было (Ариѳ. 196), что всякой членъ Геометрической прогрессіи состоитъ изъ перваго, умноженнаго на знаменателя содержанія, возведеннаго въ такую степень, которая означается числомъ предыдущихъ до него членовъ. И такъ представивъ чрезъ a первой членъ, чрезъ n всякой искомой, чрезъ q знаменателя содержанія и чрезъ n число членовъ, получимъ $n = aq^{n-1}$; а какъ въ семъ уравненіи находящся четыре количества, то можно вывести изъ него четыре формулы, которыя послужатъ къ рѣшенію такого общаго вопроса; именно по даннымъ тремъ изъ четырехъ количествъ, кои суть первой членъ, послѣдній, знаменатель содержанія и число членовъ, найти четвертое. Ибо 1^е величина n выходитъ непосредственно изъ означеннаго уравненія; 2^е величина a состоитъ изъ $a =$

$\frac{n}{q^n - 1}$; 3^е что касается до величины q , то она по изъясненному (139) способу изображается чрезъ $q = \sqrt[n-1]{\frac{n}{a}}$. Замѣтимъ здѣсь, что послѣднее сіе уравненіе заключаетъ въ себѣ тоже правило, какое изъяснили мы въ Арифметикѣ (198) для помѣщенія нѣсколькихъ пропорціональныхъ членовъ между двумя данными количествами. А какъ сіи количества въ разсматриваемой теперь прогрессіи суть a и u , то явствуетъ, что для опредѣленія знаменателя содержанія должно раздѣлить большее количество u на меньшее a , и потомъ изъ частнаго $\frac{u}{a}$ извлечь корень степени $n - 1$; но $n - 1$ означаетъ число предыдущихъ членовъ до искомаго, слѣд. и проч.

Хотя для опредѣленія величины n по уравненію $u = aq^n - 1$ Алгебра не подаетъ прямого способа; однако можно рѣшить сіе уравненіе по логарифмамъ. Мы видѣли (Ариф. 213), что для возведенія количества въ какую нибудь степень помощію логарифмовъ, должно умножить логарифмъ того количества на показателя требуемой степени. И такъ представивъ чрезъ L слово *логарифмъ*, могу взять $2La$ вмѣсто La^2 , $3La$ вмѣсто La^3 , nLa вмѣсто La^n . Напослѣдокъ припомнивъ,

что умноженіе, производимое помощію логарифмовъ, переимѣняется въ сложеніе, а дѣленіе въ вычитаніе. заключаю изъ экваци $u = aq^{n-1}$, что $Lu = La + Lq^{n-1}$, или $Lu = La + (n-1) Lq$; по переслѣвкѣ членовъ выходитъ $(n-1) Lq = Lu - La$, по раздѣленіи на Lq , $n-1 = \frac{Lu-La}{Lq}$, и наконецъ $n = \frac{Lu-La}{Lq} + 1$.

Дабы сдѣлать приоровку на послѣднее сіе правило, положимъ, что отдано 60000 рублей въ кредитъ по 5 на 100 съ условіемъ приписывать проценты къ капиталу до нѣхъ поръ, пока сумма дойдетъ до 100000. Спрашивается, въ сколько лѣтъ сдѣлается такая сумма?

Поскольку проценты предполагается здѣсь $\frac{1}{20}$ частью капитала каждаго прошедшаго года, то представивъ чрезъ a, b, c, d, e и проч. капиталы, долженствующіе возрастать изъ году въ годъ, получу $b = a + \frac{1}{20}a$, $c = b + \frac{1}{20}b$, $d = c + \frac{1}{20}c$, $e = d + \frac{1}{20}d$, то есть $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c \times (1 + \frac{1}{20})$, $e = d \times (1 + \frac{1}{20})$; отсюда явствуетъ, что капиталъ каждаго года заключается въ себѣ свой предыдущій одинаковое число разъ, которое означается здѣсь чрезъ $1 + \frac{1}{20}$ или $\frac{21}{20}$. И такъ порядокъ сихъ капиталовъ производимъ геометрическую прогрессію, коей первый членъ a состоитъ изъ 60000 рублей, послѣдній u изъ 100000 руб., знаменатель содержанія q изъ $\frac{21}{20}$; но число членовъ неизвѣстно.

Слѣд. для опредѣленія числа членовъ надлежитъ воспользоваться въ формулѣ $n = \frac{Lu-La}{Lq} + 1$ въ мѣсто a, u и q величины ихъ; послѣ чего произойдетъ $n = \frac{L_{100000} - L_{60000}}{L_{\frac{21}{20}}} + 1$, или (потому что $L_{\frac{21}{20}} = L_{21} - L_{20}$), $n = \frac{L_{100000} - L_{60000}}{L_{21} - L_{20}} + 1$; на послѣдокъ по при-

исканіи въ таблицахъ логарифмовъ данныхъ чиселъ $L_{1000000} = 6,000000$; $L_{60000} = 4,781513$, $L_{21} = 1,3222193$; $L_{20} = 1,3010300$, выходящій $n = 6,000000 - 4,7781513 + 1 =$ близу $58,7$; то есть, капиталъ состоящій изъ 60000 обратится въ 1000000 по истеченіи 58 лѣтъ и $8\frac{1}{2}$ мѣсяцовъ.

Поелику для извлеченія какой нибудь степени изъ даннаго количества посредствомъ логарифмовъ, должно (Арие. 214) раздѣлить логарифмъ того количества на показателя извлекаемой степени; и потому можно безъ всякаго труда рѣшить въ числахъ выведенное выше уравненіе $q = \sqrt[n-1]{\frac{n}{a}}$, ибо оно превра-

$$\text{щается въ } Lq = \frac{L \frac{n}{a}}{n-1} = \frac{Ln - La}{n-1}.$$

Дабы показать употребленіе сей формулы на самой практикѣ, по положимъ, что въ предыдущемъ вопросѣ требуется узнать, какъ долженъ быть великъ процентъ на капиталъ 60000, которой по истеченіи 57 $\frac{1}{2}$ лѣтъ доходитъ до 1000000 рублей. Почему въ силу требованія a будетъ $= 60000$, $n = 1000000$, $n = 58\frac{1}{2}$; и слѣд. по вѣснаніи въ таблицахъ логарифмовъ, и по вставкѣ ихъ получимъ $Lq = \frac{6,000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7}$, а по раздѣленіи

$Lq = 0,0211757$; сей логарифмъ отыскаемъ въ таблицахъ близу 1,0500; по приведеніи сего послѣдняго числа въ двадцатия части, выходящій $\frac{2\frac{1}{2}}{100}$; а изъ этого доляно заключить, что процентъ состоящій изъ $\frac{1}{20}$ капитала.

182. Изъ уравненія $s = \frac{qn - a}{q - 1}$ можно вывести такимъ же образомъ, какъ показано

было выше, четыре другія, которыя будутъ служить къ рѣшенію слѣдующаго общаго вопроса; именно, по тремъ извѣстнымъ количествамъ изъ четырехъ, кои суть сумма членовъ, знаменатель содержанія, первой и послѣдній члены Геометрической прогрессіи, опредѣлить четвертое. Это такъ легко, что мы не намѣрены останавливаться.

Наконецъ естли въ какомъ нибудь изъ двухъ уравненій $s = \frac{q^n - a}{q - 1}$ и $u = aq^{n-1}$, выведена будетъ величина одинаковаго количества a или q или u , и поставиши въ другомъ, то произойдутъ послѣ сего другія уравненія, которыя послужатъ къ рѣшенію слѣдующаго вопроса; то есть, по тремъ извѣстнымъ количествамъ изъ пяти, кои суть первой членъ, послѣдній, знаменатель содержанія, сумма и число членовъ всякой Геометрической прогрессіи, опредѣлить четвертое.

О Геометрической Конструкціи Алгебраическихъ количествъ.

183. Поелику линіи, поверхности и тѣла суть количества, то можно производить надъ каждымъ изъ нихъ сихъ пропязеній такія же дѣйствія, какія мы научились про-

изводишь въ числахъ и Алгебраическихъ количествыхъ. Результаты, выходящія изъ сихъ дѣйствій, изчисляются двоякимъ образомъ, въ числахъ или въ линейхъ. Первой способъ, въ которомъ предполагаются данныя количества изображенными въ числахъ, не представляетъ теперь никакой трудности: ибо стоитъ только въ заключительныхъ экваціяхъ поставить въ мѣсто буквъ числовыя ихъ величины, и совершить дѣйствія по расположенію знаковъ и буквъ.

Чтожъ касается до представленія результатовъ Алгебраическихъ рѣшеній въ линейхъ, то способъ онаго основывается во первыхъ на познаніи значеній или свойствъ нѣкоторыхъ главныхъ изображеній (*expressions*), потомъ всѣхъ прочихъ, къ главнымъ относящихся. Мы покажемъ напередъ, какъ должно поступать съ первыми, потомъ какъ относитъ къ нимъ прочія; и это — то значитъ *дѣлать конструкцію* или *сочиненіе* Алгебраическимъ количествамъ или задачамъ, изъ которыхъ выходятъ сіи количества.

184. Еслили количество, для котораго нужно сдѣлать конструкцію, будетъ рациональное (то есть безъ радика), и при томъ число протяженій числителя его пре-

восходитъ единицею число протяженій знаменателя, но для сочиненія такого количества, говорю я, должно всегда искать четвертую пропорциональную линію къ даннымъ тремъ. Вотъ примѣры :

Напримѣръ требуется сдѣлать конструкцію для количества $\frac{ab}{c}$, въ которомъ a , b , c означаютъ извѣстныя линіи. Проведи (фиг. 3) двѣ неопредѣленныя линіи AZ, AX подѣ произвольнымъ угломъ; на какомъ нибудь боку AX сего угла возьми часть АВ, равную линіи представляемой буквою c , потомъ часть АД равную той или другой изъ остальныхъ линій a и b , на примѣръ равную линіи a , наконецъ на второмъ боку AZ положи часть АС, равную линіи b . По соединеніи концовъ В и С линіею ВС, проводи изъ конца D линію DE, параллельную съ ВС; сія линіа DE опредѣлитъ на боку AZ часть АЕ, равную величинѣ количества $\frac{ab}{c}$. Ибо извѣстно (Геом. 102), что по причинѣ параллельныхъ DE и BC можно вывести слѣдующую пропорцію АВ : АД = АС : АЕ, то есть, $c : a = b : AE$; слѣд. $AE = \frac{ab}{c}$, то есть, для опредѣленія АЕ должно сыскать къ тремъ даннымъ линіямъ четвертую пропорциональную. А какъ для сысканія сей четвертой пропорциональной линіи предлагаются (Геом. 118) два способа, то для сочиненія количества $\frac{ab}{c}$ можно употреблять безъ разбору тотъ и другой.

Не трудно замѣнить, что для сочиненія количества $\frac{aa}{c}$, должно поступать по предыдущему примѣру; потому что линіа b въ шеперешнемъ случаѣ становится равною линіи a .

При сочиненіи количесѣва $\frac{bab + d}{c + d}$ надлежитъ замѣшпть, что это количесѣво будетъ одинаково съ $\frac{(a + d)b}{c + d}$; и такъ принявъ $a + d$ за одну линію представленную чрезъ m , а $c + d$ также за одну линію n , получимъ для конспрукціи количесѣво $\frac{mb}{n}$ такое, какое показано въ первомъ случаѣ.

Есѣли дано будетъ для конспрукціи количесѣво $\frac{aa - bb}{c}$, то должно припомнить, что $aa - bb$ произходитъ изъ $(a + b)(a - b)$; и слѣд. представивъ $\frac{aa - bb}{c}$ въ такомъ видѣ $\frac{(a + b)(a - b)}{c}$, сыщи четверную пропорціональную линію къ c , $a + b$ и $a - b$.

Есѣли данное для конспрукціи количесѣво будетъ такое $\frac{abc}{de}$, то поставь его въ слѣдующемъ видѣ $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; сочини $\frac{ab}{d}$ по показанному выше способу, и назвавъ m линію, произшедшую изъ сей конспрукціи, получишь въ мѣсто $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ количесѣво $\frac{mc}{e}$, копорому не трудно сдѣлать конспрукцію.

Изъ сего явствуетъ, что для сочиненія $\frac{a^2b}{c^2}$ надлежитъ представить его чрезъ $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$, сдѣлать напередъ конспрукцію для $\frac{a^2}{c}$, потомъ изобразивъ найденную величину чрезъ m , сочинишь количесѣво $\frac{mb}{c}$.

И такъ все искусство въ производствѣ конспрукцій состоитъ въ раздѣленіи даннаго количесѣва на

части, изъ которыхъ бы каждая превращалась въ подобной видъ $\frac{ab}{c}$ или $\frac{a^2}{c}$; а хотя это можетъ показаться иногда труднымъ, однако при помощи перемѣнъ получаемъ наконецъ желаемое.

На примѣръ если дано будетъ сдѣлать конспиркцію для $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$; то положивъ произвольно $b^3 = a^2 m$, и $c^2 = an$, превращаю $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ въ количесиво $\frac{a^3 + a^2 m}{a^2 + an}$, которое по приведеніи спланируется равно $\frac{a^2 + am}{a + n}$ или $\frac{(a + m) \times n}{a + n}$; но для сего послѣдняго количества не трудно сдѣлать конспиркцію по вышеозначенному способу, какъ скоро будемъ извѣстны m и n . Для опредѣленія же m и n вывожу изъ экваций $b^3 = a^2 m$ и $c^2 = an$ другія шакія $m = \frac{b^3}{a^2}$ и $n = \frac{c^2}{a}$, для коихъ конспиркція должна быть такая же.

Не рѣдко количества представляются въ иномъ видѣ, чю всякая перемѣна, производимая надъ ними, остается безполезною; это случается тогда, когда данное количество бываетъ неоднородное (non homogène), то есть тогда, когда каждой членъ числителя и знаменателя состоитъ не изъ одного числа факторовъ; примѣръ сего видѣнь можно въ слѣдующемъ количествѣ $\frac{a^3 + b}{c^2 + a}$. Со всѣмъ тѣмъ должно замѣнить, что мы до подобнаго результата доходимъ только въ шакомъ случаѣ, когда въ продолженіи рѣшенія нѣкоторое изъ количесивъ для простѣйшей выкладки предположено было равнымъ единицѣ. На примѣръ въ количествѣ $\frac{a^3 + b^2 c}{a^2 + c^2}$ предположивъ b равнымъ 1, получу вмѣсто его другое шакое $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. А какъ не лзя сочинять шакія количества не зная правилъ, то замѣнимъ,

что во всякомъ случаѣ можно узнавать, что количество, которое предположено равнымъ единицѣ, и слѣд. не трудно вставить его безъ перемѣны величинъ въ членахъ сочиняемаго количества, потому что онъ умноженія на единицу число не перемѣняется, только вставляя такую линію, приняшую за единицу, должно для каждаго члена возводить ее въ приличную степень. На примѣръ если дано будетъ для сочиненія такое количество $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$, то

положивъ, что d представляющъ линію, которая была принята за единицу, напишу его въ другомъ видѣ такъ $\frac{a^3 + bd^2 + c^2d}{ad + b^2d}$ — ищану дѣлать конструцію, полагая $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ и $a^3 = d^2p$; послѣ чего оно перемѣнится въ $\frac{d^2p + bd^2 + d^2n}{ad + dm}$, или въ $\frac{dp + bd + dn}{a + m}$, или въ $\frac{(p + b + n)d}{a + m}$, въ такое найслѣдокъ количество, для котораго не трудно сдѣлать конструцію, какъ скоро будутъ известны m , n , p ; величины же сихъ количествъ опредѣляются чрезъ конструцію слѣдующихъ уравненій $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^3}{d^2}$.

Хотя мы предполагали вездѣ въ предыдущихъ разсужденіяхъ, что число факторовъ или число измѣреній каждаго члена числителя превосходитъ единицу число измѣреній знаменателя; однако можетъ оно превосходить двумя и тремя, но нигдѣ большимъ числомъ, кромѣ нѣхъ случаевъ, когда нѣкоторая изъ линій будетъ принята за единицу, или когда нѣкоторые изъ факторовъ будутъ представлять числа.

185. Когда число измѣреній числителя даннаго количества превосходитъ число измѣреній знаменателя двумя единицами; тогда такое количество изображаетъ поверхность

ность, и конструція производится посредством параллелограмма или квадрата.

На примѣръ если дано будетъ сдѣлать конструцію для количества $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$, то въ первыхъ представляю его въ видѣ $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; потомъ превративъ $\frac{a^2 + ab}{a + c}$ въ $a \times \frac{a + b}{a + c}$, сочиняю послѣднее количество по вышеозначенному правилу. То, что выходитъ изъ сей конструціи, представляю чрезъ m ; отъ чего количество $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$ перемѣняется въ $a \times m$; наконецъ сдѣлавъ изъ a высоту, а изъ m основаніе параллелограмма, получу въ $a \times m$ площадь того параллелограмма; и слѣд. на оборотъ площадь сія должна представлять количество $a \times m$ или $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$.

Можно вывести такую же конструцію и для количества $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, сдѣлавъ $bc = am$ и $d^2 = an$; ибо оно становившееся въ такомъ случаѣ равно $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$ или $a \left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c} \right)$; но факторъ $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ равно какъ и величины m и n относятся къ предыдущимъ конструціямъ; слѣд. сдѣлавъ ихъ, опредѣли величину сего фактора чрезъ p , и сочини потомъ количество $a \times p$; то есть, сдѣлай параллелограммъ, котораго бы высотой было a , а основаниемъ p .

186. Наконецъ когда число измѣреній числителя данного количества превосходитъ число измѣреній знаменателя тремя едини-

цами, тогда такое количество представляется тѣло, и конструція производится посредствомъ параллелипипеда.

На примѣрѣ, если дано будетъ сочинить такое количество $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$; то представивъ его въ видѣ $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$, сдѣлаю конструцію для $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, какъ было показано; потомъ представивъ чрезъ m линію выведенную изъ сей конструціи, получу для сочиненія $ab \times m$; а какъ ab представляетъ параллелограммъ, то сдѣлавъ наконецъ такой параллелипипедъ, котораго бы основаніемъ былъ сей параллелограммъ, а высокою линію m , получу въ толщинѣ сего параллелипипеда количество $ab \times m$, то есть, $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$.

187. Посредствомъ изъясненнаго можно сочинять вообще всякое раціональное количество. Посмотримъ теперь, какъ сочиняются количества съ радикальными знаками второй степени.

Для конструціи сихъ послѣднихъ должно искать, или среднюю пропорціональную между данными двумя линіями, или типопенузу, или какой нибудь катетъ прямоугольнаго треугольника.

На примѣрѣ для сочиненія \sqrt{ab} , надлежитъ (фиг. 4) провести линію АВ не предѣленной величины, на которой положишь рядомъ АС равную линію a , и СВ равную линію b ; на всей АВ какъ на діаметрѣ описать полукруга, и изъ С поставить перпенди-

кулярѢ: сей перпендикулярѢ CD , продолженный до окружности, будетъ представлять величину \sqrt{ab} . Изъ сего явствуетъ, что для опредѣленія величины \sqrt{ab} должно сыскать среднюю пропорциональную данно между a и b . Ибо извѣстно (Геом. 121), что $AC : CD = CD : CB$, или $a : CD = CD : b$, а по умноженіи крайнихъ и среднихъ выходитъ $(CD)^2 = ab$, и слѣд. $CD = \sqrt{ab}$.

Изъ предыдущаго не трудно примѣнить, какъ должно поступать при превращеніи всякой площади въ квадратѢ. Еслили потребуется превратить въ квадратѢ параллелограммѢ, коего высокою служишь a , а основаніемъ b , то назвавъ x бокъ искомаго квадрата, скажемъ, что $x^2 = ab$, и слѣд. $x = \sqrt{ab}$. Послѣднее уравненіе показываетъ, что для опредѣленія бокъ x искомаго квадрата надлежитъ найти среднюю пропорциональную линію между основаніемъ и высокою даннаго параллелограмма. А поелику извѣстно, что прямоугольникъ составишь изъ половины параллелограмма, имѣющаго съ нимъ одинакое основаніе и одинакую высоту, то для превращенія всякаго прямоугольника въ квадратѢ, надлежитъ сыскать среднюю пропорциональную линію между основаніемъ и половиною высокою его, или между цѣлою высокою и половиннымъ основаніемъ.

Для превращенія круга въ квадратѢ, должно сыскать среднюю пропорциональную линію между радиусомъ и половиною окружностію его; наконецъ для превращенія въ квадратѢ всякой прямолинейной фигуры, надлежитъ изнесть превратить ее (Геом. 137) въ прямоугольникъ, и потомъ между половиннымъ основаніемъ и высокою его, или цѣлымъ основаніемъ и половиною высокою найти среднее пропорциональное количество.

Но еслили будетъ дана не фигура, а Алгебраическое изображеніе поверхности посредствомъ нѣкоторыхъ ея измѣреній; то должно производить конструкцію въ такомъ случаѣ по нижеслѣдующимъ наблюденіямъ.

На примѣръ естли будетъ дано такое количество $\sqrt{3ab + b^2}$, то представивъ его въ видѣ $\sqrt{(3a + b) \times b}$, найди среднюю пропорціональную между $3a + b$ и b .

Равнымѣрно для сочиненія $\sqrt{aa - bb}$, надлежитъ представить его чрезъ $\sqrt{(a + b) \times (a - b)}$, и взять среднюю пропорціональную между $a + b$ и $a - b$.

Для сочиненія $\sqrt{a^2 + bc}$ сдѣлай $bc = at$; отъ него $\sqrt{a^2 + bc}$ перемѣнится въ $\sqrt{a^2 + at}$ или въ $\sqrt{(a + t) \times a}$; и такъ сдѣлавъ конструцію для количества t по экваци $t = \frac{bc}{a}$, сыщи попомъ среднюю пропорціональную между $a + t$ и a .

Для сочиненія $\sqrt{a^2 + b^2}$ можно поступать по предыдущему случаю; ибо по предположеніи $b^2 = at$, оно обращается въ $\sqrt{(a + t) \times a}$. Однако лучше дѣлать конструцію для такого количества по свойству прямоугольнаго треугольника (Геом. 164), и именно: проведи линію АВ (фиг. 5) равную линіи a , и на концѣхъ А и В поставь перпендикуляры АС равный b ; послѣ чего проведи линію ВС, въ величинѣ которой получишь количество $\sqrt{a^2 + b^2}$; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ АВС (Геом. 164), $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$; слѣд. $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Можно помощію прямоугольнаго треугольника сочинить вышеозначенное количество $\sqrt{a^2 - b^2}$ иначе такимъ образомъ. Проведи (фиг. 7) линію АВ равную a , и описавъ на АВ, какъ на поперешникѣ полукруга АСВ, положи изъ точки А хорду АС равную b ; тогда по проведеніи ВС, получишь въ сей линіи величину количества $\sqrt{a^2 - b^2}$; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ АВС (Геом. 164), $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$, такъ же $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$; и слѣд. $BC = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Можно сдѣлать другую конструцію и для количества $\sqrt{a^2 + bc}$, противную выше показанной слѣдующимъ образомъ: сдѣлай $bc = m^2$ и сочини $\sqrt{a^2 + m^2}$, какъ было предписано; для опредѣленія же m^2 сыщи среднюю пропорціональную между b и c .

Если радикальное количество будет состоять больше, нежели из двух членов, то должно сделать для него конструцію посредствомъ показанныхъ превращеній. На примѣръ если дано будетъ сочиненіе такъ радикальное $\sqrt{a^2 + bc + ef}$, то положивъ $bc = am$, $ef = an$, получу $\sqrt{a^2 + am + an}$ или $\sqrt{(a + m + n) \times a}$; и слѣд. по опредѣленіи величинъ m и n въ экваціяхъ $m = \frac{bc}{a}$ и $n = \frac{ef}{a}$,

составлю потомъ для сочиненія $\sqrt{(a + m + n) \times a}$ сыскать среднюю пропорціональную между $a + m + n$ и a . Мы также можемъ положить $bc = m^2$, $ef = n^2$, и тогда призоидетъ $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2}$. Но если радикальное количество заключаеиъ въ себѣ нѣсколько положительныхъ квадратовъ, на примѣръ $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + r^2 + \text{и проч.}}$, то должно въ такомъ случаѣ сдѣлать $\sqrt{a^2 + m^2} = h$, $\sqrt{h^2 + n^2} = l$, $\sqrt{l^2 + p^2} = k$, и такъ далѣе; а какъ каждое изъ сихъ количествъ опредѣляется предыдущимъ, то послѣднее будетъ представлять величину $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \text{и пр ч.}}$ Для сочиненія же сихъ количествъ простѣйшимъ образомъ, надлежитъ попеременно принимать каждую гипотенизу за бокъ; на примѣръ по продолженіи $AB = a$ (фиг. 6), поставъ перпендикуляръ $AC = m$, и проведи BC , которая представитъ h ; поставъ изъ точки C на BC перпендикуляръ $CD = n$, и проведи BD , которая будетъ отвѣчать l ; изъ точки D поставъ на BD перпендикуляръ $DE = p$, точки B и E соедини прямою линеею BE , которая представитъ величину k или $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$.

Если нѣкоторые изъ сихъ квадратовъ будутъ отрицательные, то къ изъясненной шенерь конструкціи должно присоединить еще ту, которая показана была для $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Наконецъ если сочиняемое количество будетъ имѣть такой видъ $\frac{a \sqrt{b + c}}{\sqrt{d + e}}$, то переменною его въ $\frac{a \sqrt{b + c} (d + e)}{d + e}$ чрезъ умноженіе обоихъ членовъ дроби на $\sqrt{d + e}$, сыщи среднюю пропорціо-

нальную между $b + c$ и $d + c$; потомъ представивъ ее чрезъ m , сдѣлай конспрукцію для $\frac{am}{d + c}$.

Послѣнку многія конспрукціи зависящія отъ опредѣленія средней пропорціональной линіи, но не безплезно, думаю, помѣстимъ здѣсь еще два способа находить такого рода линію. Способы сіи, глядя по вещамъ, могутъ сдѣлать иногда рѣшеніе исправнѣйшимъ.

Первой состоитъ въ слѣдующемъ: опиши на какой нибудь АВ изъ данныхъ двухъ линій (фиг. 7) полукруга АСВ, и опредѣливши на ней часть АД, равную другой линіи, поставь перпендикуляръ DC; проводи потомъ хорду АС, которая представитъ среднюю пропорціональную между АВ и АД; ибо по проведеніи другой хорды СВ, треугольникъ АСВ сдѣлается прямоугольнымъ (Геом. 65); и слѣд. АС (Геом. 112) должна изображать среднюю пропорціональную между гипотенузою АВ и ортѣзкомъ АД.

Второй способъ есть такого рода: проводи (фиг. 8) линію АВ, равную данной большей, и взявши на ней часть АС, равную меньшей, опиши на остаткѣ ВС полукруга СДВ; изъ точки А проводи къ окружности тангенсъ АД, которой изобразишь (Геом. 124) среднюю пропорціональную между АВ и АС.

И такъ явствуетъ изъ сказаннаго, что раціональныя количествя сочиняются посредствомъ прямыхъ линій, а количествя съ радикалами второй степени посредствомъ круга и прямыхъ линій вмѣстѣ.

Чтожъ принадлежитъ до конспрукціи количествъ съ радикалами высшихъ степеней, то она дѣлается чрезъ совокупленіе разныхъ кривыхъ линій.

Займемся напередъ такими задачами, которыхъ рѣшеніе состоитъ или въ раціональныхъ или въ радикальныхъ второй степени количествяхъ.

Разные Геометрическіе солросы и разсужденія, какъ о способъ выводитъ изъ нихъ уравненія, такъ и о различныхъ рѣшеніяхъ сихъ уравненій.

188. Правило (60), въ которомъ показали мы способъ выводитъ изъ всѣхъ вопросовъ уравненія, употребляется равно и въ Геометрическихъ задачахъ. Здѣсь должно также искомое количество изображать извѣстнымъ знакомъ, и разсуждать по сему знаку и по прочимъ, представляющимъ другія количества, какъ бы все въ данномъ вопросѣ было извѣстно, и мы намѣрены его повѣрять. Такое дѣлопроизводство называется *Аналитикою*. Чѣмъ бытъ въ состояніи дѣлать повѣрку посредствомъ такихъ разсужденій, надлежитъ имѣть понятіе по крайней мѣрѣ о нѣкоторыхъ свойствахъ искомага количества; и слѣд. тогда только можемъ выводитъ изъ Геометрическихъ задачъ экваціи, когда твердо вкореняѣтся въ памяти нашей понятія, изъясненныя во второй части сего курса. Многіе вопросы, данныя въ числахъ, или вопросы такого рода, какіе показаны были въ первомъ отдѣленіи, часто рѣшаются однимъ переводомъ содержанія ихъ на Алгебраической языкъ; но Геометрическія задачи требуютъ еще другихъ

способовъ. Въ послѣдствіи мы не преминемъ познакомить читателей своихъ съ сими средствами; а на этотъ разъ скажемъ вообще, что не всегда нужно для повѣрки какого нибудь количества изслѣдовать, выполняется ли оно всѣ условія даннаго вопроса; но часто бываетъ довольно и того, когда количество сіе имѣетъ извѣстныя свойства, которыя существенно соединены съ условіями вопроса. По такому разсужденіи, которымъ еще будемъ имѣть случай заняться, приступимъ къ примѣрамъ, которые объясняютъ дѣло лучше, нежели самыя правила.

189. Положимъ, что первымъ вопросомъ требуется *начертить квадратъ ABCD (Фиг. 9) въ данномъ треугольникѣ ENI.*

Подъ словами *данной треугольникъ* разумѣется здѣсь такой, въ которомъ все извѣстно: бока, углы, высота и проч.

Съ малѣйшимъ вниманіемъ можно примѣтить, что въ силу сего вопроса должно опредѣлить на высотѣ EF такую точку G, чрезъ которую проведенная линия AB параллельно съ NI должна быть равна GF. И такъ эквация выходитъ сама собою; стоитъ только опредѣлить Алгебраически AN и FG, и попомъ ихъ приравнять.

Представимъ чрезъ a извѣстную высоту EF , чрезъ b извѣстное основаніе HI , и чрезъ x неизвѣстную линію GF ; послѣ чего EG будетъ равно $a - x$.

А какъ AB параллельна съ HI , то (*Геом.* 109) можетъ имѣть мѣсто такая пропорція $EF : EG = FI : GB = HI : AB$; то есть, $EF : EG = HI : AB$, или $a : a - x = b : AB$, слѣд. (*Ариф.* 169) $AB = \frac{ab - bx}{a}$; а какъ притомъ AB должна быть равна GF , то $\frac{ab - bx}{a} = x$; изъ сего уравненія выходитъ по правиламъ перваго отдѣленія $x = \frac{ab}{a + b}$.

Теперь чтобъ сдѣлать конструцію для сего количества, должно въ сходственность сказаннаго (184) найти четвертую пропорціональную къ $a + b$, a и b ; въ разсужденіи чего поступай такъ: перенеси изъ F въ O линію FO равную $a + b$, то есть, равную $EF + HI$, и проводи EO ; потомъ взявши FM равную $HI = b$, протяни параллельно съ EO линію MG , которая пересѣкшись съ EF опредѣлитъ GF за сходственную величину x ; ибо по причинѣ подобныхъ треугольниковъ $FO : FM = FE : FG$, или

$a + b : b = a : FG$; слѣд. FG должна быть равна $\frac{ab}{a+b}$.

190. Предложимъ вторымъ вопросомъ слѣдующій: Даны длина лини BC и углы B и C , которые состоятъ изъ той лини и двухъ другихъ AB и AC ; опредѣлить, на какой высотѣ AD послѣднія сіи лини сходятся.

Въ Алгебраическихъ выкладкахъ допускаются углы посредствомъ линей, употребляемыхъ въ Тригонометріи, то есть, посредствомъ синусовъ, тангенсовъ и проч. Такимъ образомъ чрезъ данной уголъ, на примѣръ C должно разумѣть, что дана величина его синуса или тангенса. По предположеніи сего пусть будетъ $BC = a$, $AD = y$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ADC , получимъ (Геом. 300) $CD : DA$ какъ радіусъ къ тангенсу угла ACD , или $CD : y = r : m$, назвавъ r радіусъ, а m тангенсъ угла ACD ; слѣд. (Ариф. 169) $CD = \frac{ry}{m}$. Разсуждая такимъ же образомъ, получимъ, назвавъ n тангенсъ угла ABD , $BD : y = r : n$, и слѣд. $BD = \frac{ry}{n}$; а какъ $BD + DC = BC = a$, то $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$. Изъ сего уравненія величина y выходитъ такая $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

Можно сдѣлать изображеніе сіе проще; поставивши на мѣсто тангенсовъ m и n двухъ угловъ C и B котангенсы ихъ, которые назовемъ p и q . Для сего случая надлежитъ припомнить (Геом. 295), что $\text{танг.} : r = r : \text{кот.}$; и такъ въ силу сего предложенія можно послать $m : r = r : p$, и $n : r = r : q$; величины m и n опредѣлятся слѣдующими уравненіями $m = \frac{r^2}{p}$, а $n = \frac{r^2}{q}$, слѣд. $mn = \frac{r^4}{pq}$, а $rn + rm = \frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q} = \frac{r^3(p+q)}{pq}$; наконецъ $y = \frac{ar}{p+q}$.

Для конспрукціи сего количества должно сыскаль четвертую пропорціональную линію между $p + q$, r и a .

191. Даны высоты AC и BD двухъ предметовъ C и D (фиг. 11) въ нѣкоторой плоскости; и разстояніе ихъ AB параллельное съ тою плоскостію; опредѣлить на AB такую точку E , которая бы находилась въ равномъ разстояніи отъ C и D ?

Естьли можно провести прямую линію отъ C къ D , то для опредѣленія искомой точки E стоить только избъ середины CD поставивъ перпендикуляръ KE , которой не минуемо упадетъ въ E . Когдажъ не лзя

того сдѣлать, тогда точку Е должно опредѣлить слѣдующимъ образомъ.

Положи $AC = a$, $DB = b$, $AB = c$,
 $AE = x$; отъ чего произойдетъ $BE = c - x$,
 $CE = \sqrt{(aa + xx)}$ (Геом. 164), $DE =$
 $\sqrt{[bb + (c - x)^2]}$. А какъ по требова-
 нію $CE = DE$, слѣд. $\sqrt{(aa + xx)} =$
 $\sqrt{[bb + (c - x)^2]}$. По составленіи въ
 сей экваціи квадратовъ, и напоследокъ
 по перестановкѣ членовъ найдется $x =$
 $\frac{cc - aa + bb}{2c} = \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} \cdot \frac{(a + b)(a - b)}{c}$. Для
 сочиненія сего количества поступай такъ.

Изъ середины L линей АВ проводи LG
 параллельную съ AC, которая пересѣчетъ
 въ G прямую DF параллельную съ АВ; сдѣ-
 лай $LI = \frac{1}{2}c = LA$, $LH = \frac{1}{2}(a - b)$
 $= \frac{1}{2}CF$, и $LO = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a - b)$
 $+ b = GH$; соедини точки I и O прямою
 IO, и проводи изъ точки H параллельную
 къ ней HE, которая и опредѣлитъ на АВ
 искомую точку Е. Ибо $LI : LO = LH : LE$,
 то есть, $\frac{1}{2}c : \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a - b) : LE$;
 почему $LE = \frac{\frac{1}{2}(a + b) \times \frac{1}{2}(a - b)}{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2} \frac{(a + b)(a - b)}{c}$;
 но $AE = AL - LE = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2} \frac{(a + b)(a - b)}{c}$;
 слѣд. $AE = x$.

192. Возмемъ для четвертаго примѣра такой вопросъ, которой покажемъ намъ, какъ должно выводимъ уравненія изъ Геометрическихъ задачъ, и какъ чрезъ разныя приуготовленія сихъ уравненій можно открывать новыя предложенія.

По извѣстныиѣ тремѣ бокамѣ како-го нибудь треугольника ABC (фиг. 12), найти отрѣзки AD и DC и перпендикулярѣ BD, которой производитѣ тѣ отрѣзки.

Еслии извѣстны будутѣ искомыя лини, то для повѣрки спаву поступать такъ: сложу квадратѣ BD съ квадратомѣ CD, и посмотрю, будетѣ ли сумма ихъ равна квадрату BC, пошому что треугольникѣ BDC есть прямоугольной (Геом. 164). Равномѣрно сложивѣ квадратѣ AD съ квадратомѣ BD, увѣрюсь въ исправности рѣшенія чрезъ равенство суммы сей съ квадратомѣ AB.

Поступая по сему разсужденію, положимъ $BD = y$, $CD = x$, $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$; послѣ чего $AD = AC - CD$ будетѣ также $= c - x$. И такъ заключимъ, что $xx + yy = aa$, и $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Поелику xx и yy въ каждомъ уравненій имѣютъ коэффициентомъ единицу, то вычитаю второе уравненіе изъ перваго; въ остаткѣ получаю вдругъ $2cx - cc = aa - bb$, изъ котораго вывожу $x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$, что можно изобразить иначе такимъ образомъ:

$$x = \frac{1}{2} \frac{(a + b)(a - b)}{c} + \frac{1}{2}c.$$

Но для опредѣленія величины x подѣ такимъ видомъ уравненія, должно сыскать четвертую пропорціональную линію между c , $a + b$ и $a - b$, потомъ къ половинѣ ея прибавить $\frac{1}{2}c$, то есть половину бока AC ; что точно сходствуетъ съ сказаннымъ (Геом. 307).

Изъ сихъ же эквацій можно вывести множество другихъ заключеній: мы намѣрены предложить нѣкоторыя, чтобъ приучить начинающихъ проникать въ содержаніе уравненій.

193. іе. Уравненіе $2xx - cc = aa - bb$ есть одинаково съ $c \cdot (2x - c) = (a + b)(a - b)$. А какъ произведеніе двухъ первыхъ факторовъ во второй экваціи равно произведенію двухъ послѣднихъ; то можно принять два первые фактора за крайніе члены пропорціи, а два послѣдніе за средніе, и представивъ ее чрезъ $c : a + b = a - b : 2x - c$; но $2x - c$ есть тожъ; что $x - (c - x)$; слѣд. поста-

визѢ на мѣсто сихъ буквъ представляемыя имѣли
неи, получу $AC : BC + AB = BC - AB : CD - AD$,
что сходствуемъ съ доказаннымъ (Геом. 306) пред-
ложеніемъ.

194. 2е. Еслили изъ точки С, какъ изъ цент-
ра, радіусомъ равнымъ ВС опущенъ дуга ВО и про-
веденъ хорда ВО, то произойдетъ $(BO)^2 + (DO)^2 = (VO)^2$; но $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$;
слѣд. $(BO)^2 = yu + aa - 2ax + xx$; а какъ найде-
мо выше, что $yu + xx = aa$, то $(BO)^2 = 2aa - 2ax$
 $= 2a(a - x)$; вставивъ въ это уравненіе на мѣ-

сто x величину его $\frac{aa - bb + cc}{2c}$, получу $(BO)^2 =$

$$2a \left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c} \right) = 2a \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c} \right) =$$

$$\frac{a}{c} \times [bb - (a - c)^2], \text{ потому что } 2ac - aa - cc$$

$= - (aa - 2ac + cc) = - (a - c)^2$; принимая $a - c$
за опредѣленное количество, можно заключить, что $bb -$
 $(a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; слѣд. $(BO)^2$

$$= \frac{a}{c} (b + a - c)(b - a + c), \text{ что можно пред-}$$

ставить въ другомъ такомъ видѣ $(BO)^2 = \frac{a}{c} (a +$

$b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$. И такъ представивъ

$$\text{чрезъ } 2s \text{ сумму трехъ боковъ, получу } (BO)^2 = \frac{a}{c}$$

$$(2s - 2c)(2s - 2a) = 4 \frac{a}{c} (s - c)(s - a). \text{ Если-}$$

ли изъ точки С опущенъ на ОВ перпендикуляръ
СІ, то въ прямоугольномъ треугольникѣ СІО можно
поставить (Геом. 299) слѣдующую пропорцію, $CO : CI$
 $= R : \sin. OCI$, то есть, $a : \frac{1}{2} BO = R : \sin. OCI$;

$$\text{слѣд. } \frac{1}{2} BO = \frac{a \times \sin. OCI}{R}, \text{ или } BO = \frac{2a \times \sin. OCI}{R},$$

$$\text{и } (BO)^2 = \frac{4a^2 \times (\sin. OCI)^2}{R^2}; \text{ сравнивъ на послѣдокъ}$$

$$\text{двѣ найденныя величины } (BO)^2, \text{ получу } \frac{4a^2}{R^2} (\sin.$$

$(\text{ОСІ})^2 = \frac{4a}{c} (s - c) (s - a)$, или по раздѣленіи на $4a$ и по уничтоженіи знаменателей ac $(\text{син. ОСІ})^2 = R^2 (s - c) (s - a)$; изъ сего уравненія выведу такую пропорцію $ac : (s - c) (s - a) = R^2 : (\text{син. ОСІ})^2$, которая покажетъ правило, какъ находить всякой уголъ въ прямолинейномъ треугольникѣ по шоемъ известнымъ его бокамъ. Правило сіе состоитъ въ слѣдующемъ.

Сложи всѣ три бока вмѣстѣ, и изъ половины суммы вычти порознь каждой изъ боковъ, заключающихъ искомой уголъ; отъ чего выдуть два остатка; потомъ пошлай такую пропорцію ... Какъ произведение двухъ боковъ, заключающихъ уголъ, содержитсяъ къ произведению двухъ остатковъ, такъ квадратъ радіуса къ четвертому члену, то есть, къ квадрату синуса половины искомага угла.

Но производя правило сіе въ логариѣмахъ, поступи такъ:

Сложи всѣ три бока вмѣстѣ, и изъ половины суммы вычти порознь каждой изъ боковъ, заключающихъ искомой уголъ: чрезъ что получишь два остатка. Потомъ сложи логариѣмы сихъ двухъ остатковъ и Арифметическія дополненія логариѣмовъ двухъ боковъ, между которыми заключается искомой уголъ; половина суммы сихъ логариѣмовъ покажетъ логариѣмъ синуса половины искомага угла.

Правило сіе сходствуетъ съ показаннымъ (Геом. 390) въ вопросѣ VI.

195. 3е. Изъ уравненія $уу + хх = аа$ можно вывести $уу = аа - хх = (а + х) (а - х)$, которое по вставкѣ величины $х$ превратится въ $уу = (а + \frac{аа - бб + сс}{2с}) (а + \frac{бб - аа - сс}{2с}) = \dots$
 $(\frac{2ас + аа + сс - бб}{2с}) \times (\frac{2ас - аа - сс + бб}{2с}) =$
 $(\frac{(а + с)^2 - бб}{2с}) \times (\frac{бб - (а - с)^2}{2с}) = (\frac{а + с + б}{2с} \frac{а + с - б}{2с})$

$\times \left(\frac{b+a-c)(b-a+c}{2c} \right)$; слѣд. $4csu = (a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$, или $4csu = (a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)$. И такъ представивъ чрезъ $2s$ сумму $a+b+c$ трехъ боковъ, получу $4csu = 2s.(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)$, или $4csu = 16s.(s-a)(s-b)(s-c)$; наконецъ по раздѣленіи на 16 , по приведеніи и по извлеченіи квадратнаго корня выведу $\frac{cy}{2} = \sqrt{s.(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Но $\frac{cy}{2}$ или $\frac{AC \times BD}{2}$ представляетъ площадь тѣхъ угольника $ABCD$; слѣд. для счисленія площади какого либо треугольника по известнымъ его бокамъ, должно изъ половинной суммы вычесть порознь каждой бока; всѣ остатки умножить между собою и на половинную сумму; наконецъ изъ произведенія извлечь квадратной корень.

196. 4е. Изъ экваци $2cx + cc = aa - bb$ выходитъ $bb = aa + cc - 2cx$; но еслии перпендикуляръ упадетъ внѣ треугольника (фиг. 13), то оснанивъ тѣмъ наименованія линейамъ, получу $yu + xx = aa$, и $yu + cc + 2cx + xx = bb$, пошому что AD , которую прежде представляло численіе $c - x$, здѣсь представляетъ численіе $c + x$.

Еслии первое уравненіе вычту изъ втораго, то произойдетъ $cc + 2cx = bb - aa$, или $c(c+2x) = (b+a) \times (b-a)$, изъ котораго можно вывести такую пропорцію $c : b+a = b-a : c+2x$; а какъ $c+2x$ равно $x+c+x$ и представляетъ $CD + AD$, то выводю наконецъ $AC : AB + BC = AB - BC : CD + AD$ такую пропорцію, которая сходствуетъ со второю часнію доказаннаго (Геом. 30б) предложенія.

197. 5е. Изъ этого же уравненія $cc + 2cx = bb - aa$ выходитъ $bb = aa + cc + 2cx$; почему сравнивъ сіе послѣднее съ $bb = aa + cc - 2cx$, которое относится къ фигурѣ 12, найдемъ, что квадратъ bb бока AB , лежащаго противъ остраго угла C состав-

длени меньше суммы $aa + cc$ квадратовъ двухъ прочихъ боковъ, попому что онъ, какъ видѣнь можно изъ самой экваци, равняется той суммѣ безъ $2cx$. Напротивъ квадрата bb бока АВ противоположнаго тупому углу (фиг. 13) равняется $aa + cc + 2cx$, то есть, бываетъ больше суммы квадратовъ двухъ прочихъ боковъ; слѣд. по симъ двумъ замѣчаніямъ можно, дѣлая выкладку угламъ какого нибудь треугольника посредствомъ боковъ его, узнавать, каковъ долженъ быть искомой уголъ, тупой или острый.

198. бс. Два уравненія $bb = aa + cc - 2cx$ и $bb = aa + cc + 2cx$ подтверждаютъ изъясненное объ отрицательныхъ количествахъ. Ибо можно видѣнь, что отрезокъ CD, смотря по положенію перпендикуляра BD (фиг. 12 и 13), какъ онъ упадетъ внутри или внѣ треугольника, соотношнъ изъ разныхъ боковъ; различіе сіе показывается въ означенныхъ уравненіяхъ противными знаками члена $2cx$. И такъ во всякой выкладкѣ, производимой для какого нибудь треугольника, должно во всѣхъ случаяхъ сходствующихъ со вторымъ, поминать съ противными знаками всѣ нѣ части, которыя будутъ занимать противныя стороны на одной и той же линіи. А какъ отрезокъ CD не употребляется въ изысканіи угловъ и площади, то оба предложенія (194 и 195) приличествуютъ одинаково прямолинейнымъ треугольникамъ всякаго рода, какъ остроугольнымъ, такъ и тупоугольнымъ.

199. Хотя вообще легче и скорѣе можно выводиль изъ Геометрическихъ задачъ уравненія тому, кому болѣе извѣстно число свойствъ линей; однакожъ, поелику Алгебра сама преподаетъ средства находить оныя свойства, число Геометрическихъ предложеній настояще нужныхъ довольно ограничено. Сии два, именно: въ подобныхъ треугольникахъ сходственные бока бываютъ про-

порціональны; и въ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ боковъ, лежащихъ при прямомъ углѣ, служатъ главнымъ основаніемъ Алгебраической приписки къ Геометріи. Однако смотря по свойству вопросовъ, можно разнымъ образомъ употреблять сіи предложенія: это замѣтить не трудно было въ предыдущемъ примѣрѣ; ибо въ заключеніяхъ, выведенныхъ нами изъ его рѣшенія при выкладкѣ угла посредствомъ трехъ боковъ, догадка описывать дугу ВО (фиг. 12), чтобъ опредѣлить хорду ВО, и по половинѣ ея ОІ сыскать синусъ угла ОСІ, не такъ-то легко приходило на мысль. Этакимъ догадки требуютъ и многія другія задачи; ибо для рѣшенія ихъ нужно иногда продолжать нѣкоторыя изъ линий до пересѣченія ихъ съ другими, иногда проводить къ нимъ параллельныя или такія, которыя бы составляли съ ними известной уголъ. Словомъ, знажокъ въ примѣненіи Алгебры къ Геометріи и ко всему другому долженъ имѣть разборъ въ употребляемыхъ средствахъ; но какъ разборъ сей свискивается по большей части практикою, то мы означенныя наблюденія свои стараемся объяснить разными примѣрами.

200. Предложимъ теперь такой вопросъ: Изъ точки А (фиг. 14), коей положеніе извѣстно въ разсужденіи двухъ линей HD и DI, составляющихъ извѣстной уголъ HDI, провести прямую линію AEG такъ, чтобъ произошелъ треугольникъ EDG опредѣленной площади, то есть, равной извѣстному квадрату cc .

Изъ точки А проведи линію АВ, параллельную съ DH, и линію АС перпендикулярную къ продолженной DG; изъ точки Е, гдѣ линія АЕГ должна пересѣчь DH, вообрази перпендикуляръ EF.

Если бы будущъ извѣстны EF и DG, то умноживъ ихъ между собою и взявъ изъ произведенія половину, получишь площадь треугольника EDG, которая должна равняться cc .

И такъ положимъ $DG = x$; чтожъ касается до EF, то посмотримъ, не можно ли опредѣлить величину сей линіи по x , или по даннымъ частямъ въ вопросѣ.

Поелику допустили мы, что положеніе точки А извѣстно, слѣд. должно почитать также извѣстнымъ разстояніе BD, по которому проходитъ параллельная АВ, и раз-

стояние AC отъ точки A до продолженной
линии DG . И пакъ представивъ BD чрезъ
 a , а AC чрезъ b , получимъ въ подобныхъ
треугольникахъ ABG , EDG пропорцію $BG :$
 $DG = AG : EG$, и въ подобныхъ треуголь-
никахъ ACG , EFG другую слѣдующую $AG :$
 $EG = AC : EF$; слѣд. $BG : DG = AC : EF$,
то есть, $a + x : x = b : EF$; почему $EF =$
 $\frac{bx}{a + x}$. Но какъ площадь треугольника EDG
должна равняться квадрату cc , то $EF \times$
 $\frac{DG}{2}$ или $\frac{bx}{a + x} \times \frac{x}{2} = cc$, то есть $\frac{bxx}{2a + 2x}$
 $= cc$, или по уничтоженіи знаменателя
 $bxx = 2acc + 2cxc$.

Разрѣшивъ сію эквацію по правиламъ (81
и слѣд.) нахожу двѣ слѣдующія величины
 $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{b}\right)^2 + \frac{2acc}{b}}$; вторая изъ нихъ
съ знакомъ — не годится для настоящаго
вопроса.

Производя конструкцію для первой вели-
чины, представляю ее въ такомъ видѣ $x =$
 $\frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$. Провожу неопредѣлен-
ную линию PQ (фиг. 15), спавлю изъ ка-
койнибудь ея точки C перпендикуляръ AC
 $= b$, и кладу на CA и CP линии CO , CM ,
равныя боку c даннаго квадрата; провожу

АМ и къ ней изъ точки О параллельную ON, которая опредѣляетъ чрезъ CN величину количества $\frac{cc}{b}$; потому что въ подобныхъ треугольникахъ ACM, OCN можно послать AC:OC = CM:CN, то есть, $b:c = c:CN$; и слѣд. CN = $\frac{cc}{b}$. По опредѣленіи сего, величина x превращается въ $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; но $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$ представляетъ (187) среднюю пропорциональную линію между CN и CN + 2a; почему спосишь теперь опредѣлить сію среднюю пропорциональную линію и сложить ее съ CN. Кладу на продолженіи NC линію CQ = 2a, и на всей NQ описываю полукруга NVQ, которой пересѣкаетъ въ точкѣ V продолженіе CA; кладу изъ N въ P хорду NV, и получаю CP за величину x ; поелику NV есть (Геом. 112) средняя пропорциональная между NC и NQ, то есть, между CN и CN + 2a; слѣд. NV или PN = $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; слѣд. CP = CN + PN = CN + $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]} = x$. Еслили по перенесеніи CP изъ D въ G (фиг. 14) проведу отъ точки G къ А прямую линію AG, то тѣмъ опредѣлю треугольникъ EDG, котораго площадь будетъ равна квадрату cc.

201. Что принадлежит до значенія второй величины x , именно $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}}$, то

должно для понятія оного примѣнить, что по вопросу неизвѣстно, о какомъ именно углѣ дѣлаиденъ, обѣ углы ли EDG (фиг. 14) или о равномъ ему $E'DG'$, который сослѣдуетъ изъ продолженія линей GD , ED ; данныя количества какъ для сего угла, такъ и для другаго служатъ одинаково, и потому въпрое рѣшеніе должно относиться къ такому вопросу, которымъ прѣбуженъ сдѣлать въ углѣ $E'DG'$ тоже самое, что мы сдѣлали выше въ углѣ EDG . Почему предсавивъ DG' чрезъ x и удержавъ для прочихъ количествъ прежнія наименованія, выведу въ подобныхъ треугольникахъ ABG' , $E'DG'$ по причинѣ параллельныхъ AB и DE' , такую пропорцію $BG' : DG' = AG' : G'E'$; потомъ опустивъ перпендикуляръ $E'F'$, получу въ подобныхъ треугольникахъ ACG' , $E'F'G'$ другую такую $AG' : G'E' = AC : F'E'$; слѣд. $BG' : DG' = AC : F'E'$, то есть, $a - x : x = b : F'E'$; почему $F'E' = \frac{bx}{a - x}$; а какъ площадь треугольника $G'E'D$ должна

равняться квадрату cc , то $\frac{bx}{a - x} \times \frac{x}{2} = cc$; изъ

сего уравненія вывожу $bxx = 2acc - 2cax$, и на послѣ-

докъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ величины x , ко-

торыя во всемъ, кромѣ знаковъ, сходствуютъ съ прежними, какъ то и въ самомъ дѣлѣ должно произойти, потому что количество x принимается здѣсь противно прежнему случаю. Новое подтвержденіе на опредѣлительныя количества, которыя, какъ мы неоднократно напоминали, должны быть принимаемы въ противномъ смыслѣ.

Конструкція, сдѣланная въ предыдущемъ случаѣ, служитъ и здѣсь съ одною только тою переменною, что NV (фиг. 15) должно перенести изъ N въ K къ сторонѣ Q ; почему величина x , которую прежде представляла CP , будетъ здѣсь состоять изъ $СК$. Въ самомъ дѣлѣ величина x , приличная для настоящаго случая, изображается чрезъ $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$,

или чрезъ $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{(\frac{cc}{b} + 2a) \times \frac{cc}{b}}$, то
 есть, $x = -CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$; а какъ
 $NV = \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$, то $x = -CN + NV$
 $= -CN + NK = CK$. И такъ по перенесеніи СК
 изъ D въ G' (фиг. 14) и по проведеніи чрезъ точку
 G' и А прям. й линіи AG'E', произойдетъ треуголь-
 никъ G'DE' равный квадрату cc, то есть, такой,
 которой сходствуемъ со вторымъ рѣшеніемъ вопроса.

202. Въ обоихъ предыдущихъ случаяхъ предполагали
 мы, что точка А (фиг. 14.) находится сверху линіи ВЗ;
 теперь есмьли допустимъ ее снизу (фиг. 16); то ко-
 личество b, или линія АС сдѣлается отрицатель-
 нымъ, и поному первыя двѣ величины x изобразяи-
 ся чрезъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b})}$, или $x = -$
 $\frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}}$. Отсюда явствуетъ, что
 задача спавовится возможною тогда только, когда
 2a будетъ меньше $\frac{cc}{b}$; но есмьли оно будетъ больше,
 то количество съ радикальнымъ знакомъ сдѣлается
 отрицательнымъ, и слѣд. (85) величина x выйдетъ
 или умственной или несообразною. Когда 2a мень-
 ше $\frac{cc}{b}$, тогда обѣ величины x будутъ отрицатель-
 ными, и слѣд. задача сдѣлается невозможною въ раз-
 сужденіи угла HDI, но въ разсужденіи равнаго ему
 угла E'DG' она будетъ имѣть два рѣшенія. Для по-
 казанія сихъ рѣшеній сдѣлай конспирецію для обѣихъ
 величинъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}}$ слѣду-
 ющимъ образомъ. Опредѣливши по вышеозначенно-
 му способу величину CN количества $\frac{cc}{b}$, сдѣлай (фиг.
 17) NQ = 2a; потомъ описавъ на сей линіи какъ на
 діаметрѣ полукруга NVQ, проводи тангенсъ CV; пе-
 ренеси CV изъ С въ Р къ спору N, и изъ С въ К
 пропивно предыдущему случаю; тогда NP и NK бу-
 дутъ служить двумя величинами x. Наконецъ по-

ложивъ (фиг. 15) NP и NK изъ D въ G , и изъ D въ G' , проводи чрезъ точку A , и чрезъ точки G и G' прямыя линіи EG и $E'G'$; отъ чего произойдутъ два треугольника EDG и $E'DG'$, изъ которыхъ каждой будетъ равенъ квадрату cc . Дабы увѣриться въ томъ, что NP и NK (фиг. 17) служатъ величинами x , то должно припомнить, что CV (Геом. 124) представляя среднюю пропорціональную линію между CN и CQ , будетъ $= \sqrt{CQ \times CN}$, или (по вставкѣ величинъ сихъ линій) CV или CP или $CK = \dots$

$$\sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \frac{cc}{b}}; \text{ слѣд. } NP = CN - CP = \frac{cc}{b} -$$

$$\sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \frac{cc}{b}}, \text{ и } NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \dots$$

$$\sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \frac{cc}{b}}; \text{ а какъ количества сїи, по пере-$$

мѣнѣ ихъ знаковъ, сходятся въ точности съ величинами x , то онѣ, и по перенесеніи ихъ изъ D въ G (фиг. 16), будутъ также представлять величины x .

203. Когда точка A (фиг. 18) будетъ заключаться въ самомъ углѣ NDI , тогда BD просираваясь въ противную сторону въ разсужденіи предыдущихъ случаевъ, сдѣлается отрицательнымъ количествомъ; и потому двѣ начальные величины x превращаясь въ

$$x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}, \text{ которыя по перемѣнѣ}$$

ихъ знаковъ будутъ одинаковы съ сочиненными предъ симъ. И такъ по совершеніи такой же конструкціи, какая показана (фиг. 17), должно перенести величины NP и NK количества x , изъ D (фиг. 18) къ сторонѣ I ; отъ чего произойдутъ два треугольника DEG , $DE'G'$, изъ которыхъ каждой рѣшится вопросъ.

204. Наконецъ точка A (фиг. 19.) можетъ лежать ниже BD въ углѣ BDE' . Въ такомъ случаѣ оба количества a и b будутъ отрицательными; и слѣд. величины x

$$\text{изобразятся чрезъ } x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}, \text{ кото-$$

рыя имѣютъ совсѣмъ противные знаки съ первыми.

Конструкція въ такомъ положеніи служилъ сдѣланная (фиг. 15). Только СК представляеиъ здѣсь положительную величину x , а СР отрицательную; первую должно перенести (фиг. 19) изъ D въ G къ споруѣ В, а другую напротивъ изъ D въ G'.

Мы постарались изъяснить сколько разныхъ случаевъ для настоящаго рѣшенія единственно для того, чибобъ показать, какимъ образомъ они заключающаея все въ одномъ уравненіи, какимъ образомъ они выводятся посредствомъ перемѣны знаковъ, и какимъ образомъ прѣотивныя положенія линей означаются прѣотивносію знаковъ, и на оборотъ. Теперь остается показать нѣкоторыя еще уиощренія тогожъ рѣшенія.

205. Слѣдующій вопросъ: изъ данной точки (фиг. 20) внѣ треугольника или внутри треугольника DHI, провести лицею АЕ такъ, чтобъ она раздѣлила сей треугольникъ на двѣ части EDF, EFIN, которыя бы содержались между собою какъ $m : n$, можно рѣшить такимъ же образомъ, какъ и предыдущій. Поскольку площадь треугольника DHI дана, и пришеиъ извѣстно, какую часть треугольникъ DEF долженъ занимать въ треугольникѣ DHI, то сдѣлаю такую посылку $m + n : m = \text{площадь треугольника DHI къ четвертому члену, которой долженъ представлять площадь треугольника DEF}$. Но можно сдѣлать всегда квадратиъ cc равной площади треугольника DEF (185); слѣд. въ настоящемъ вопросѣ иребуется тожъ самое, что и въ предыдущемъ, именно провести чрезъ точку А такую лицею АЕЕ, коиорая бы сдѣлала съ боками DH, DI треугольникъ DEF, равный квадрату cc .

206. Можно рѣшить шѣмъ же способомъ и слѣдующій другой вопросъ: раздѣлить всякую прямолинейную фигуру BKHDC (фиг. 21) лицею, проведенною изъ данной точки А, на двѣ части BCFE и EFDHK въ известномъ содержаніи. Поскольку въ данной фигурѣ BCDHK все углы и все бока извѣстны, то безъ всякаго труда можно опредѣлить треугольникъ BLC, коиорой составляютъ продолженные бока KB и DC, потому что въ этомъ треугольникѣ бока

ВС и два угла $\angle ВС$, $\angle СВ$ дополненія данныхъ угловъ $\angle СЕВ$ и $\angle ВСВ$ извѣстны; и такъ площадь треугольника $ВЕС$ можно починать теперь за извѣстную, а какъ площадь $ЕВ \cdot F$ должна занимать определенную часть всей фигуры, то и треугольникъ $ВЕС$ будетъ также извѣстенъ; сдѣл. для ршенія предложеннаго вопроса снѣнки нѣсколь пр. веси такую прямую линію $АЕВ$, которая бы составляла съ угломъ $\angle КВ$ треугольникъ, равный извѣстному квадрату. Наконецъ явственнѣ изъ сего, какимъ образомъ должно поступать при раздѣленіи сей фигуры на большее число частей, коихъ содержаніе будетъ дано.

207. Нужно еще замѣтить здѣсь, что естли нѣкоторыя изъ данныхъ количествъ уравненія, служащаго къ ршенію вопроса; суть таковы, что и по переменѣ въ нихъ знаковъ сама эквація не переменяется; или естли сдѣланная переменна въ положеніи искомой линіи или линіи не переменяется положенія и величины въ данныхъ линіяхъ; то между разными величинами x , когда ихъ будетъ много въ уравненіи, найдется всегда одна такая, которая разрѣшитъ приличнымъ образомъ случай, означенный переменною.

На примѣрѣ въ практуемой выше экваціи видѣли мы, что одна изъ величинъ x служила ршеніемъ вопросу на такой случай, когда линія $АЕВ$ (фиг. 14) должна проходить чрезъ уголъ $\angle ВД$, а другая на такой, когда таже линія должна проходить чрезъ противоположенной ему.

208. Положимъ, что требуется найти на направленіи данной линіи $АВ$ (фиг. 22) такую точку $С$, которой бы

разстояніе отъ А представило среднюю пропорціональную между разстояніемъ ся отъ В и цѣлою линеею АВ.

Представь данную линію АВ чрезъ a , а искомое разстояніе АС чрезъ x : послѣ чего ВС сдѣлается равна $a - x$. Но какъ требуется, чтобъ $AB : AC = AC : CB$ или $a : x = x : a - x$, то по умноженіи крайнихъ и среднихъ членовъ въ сей пропорціи произойдетъ $ax = aa - ax$, или $ax + ax = aa$ эквація второй степени, которую рѣшивъ надлежащимъ образомъ, получу $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$.

Для сочиненія первой величины $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, поставь (187) изъ точки В перпендикуляръ $BD = \frac{1}{2}a$ и проведи линію AD; отъ чего произойдетъ $AD = \sqrt{[(BD)^2 + (AB)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; вычти изъ сей линіи количество $\frac{1}{2}a$, а сіе сдѣлай перенесши DB изъ D въ О; тогда АО будетъ равна $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)} - \frac{1}{2}a$, то есть, количеству x ; на послѣдокъ перенеси АО изъ А къ В; точка С, гдѣ та линія кончится, будетъ желаемая.

Что касается до второй величины x , именно $-\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, то положи BD изъ D въ О' на продолженіи AD; отъ чего АО' сдѣлается $= \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; а какъ это же количество, взятое въ отрицательномъ смыслѣ, представитъ величину

ж, то перенеси AO' изъ A въ C' на продолженной AB въ противную сторону, и тогда получишь вторую точку C' такую, которой расстояние до A будетъ служить также среднюю пропорціональную линеею между $C'B$ и AB .

Замѣтимъ, что вопросъ сей заключаетъ въ себѣ такой, которымъ преуеется *раздѣлить данную линеею AB по наружной посредственной пропорціи*; почему сдѣланная теперь конструкція сходствуетъ во всемъ съ показаною въ Геометріи (125); которую тамъ предполагали мы уже найденною:

209. Разсматривая дорогу, которою доходили мы до рѣшенія предыдущихъ вопросовъ, не трудно увидѣть, что мы избирали вездѣ неизвѣстнымъ количествомъ такую линеею, которая, какъ скоро становится извѣстною, опредѣляетъ и всѣ прочія; также должно поступать и впередъ. Но какъ между многими линейями, имѣющими свойство опредѣлять всѣ прочія, находясь не рѣдко такія, которыя выводятъ уравненія сложнѣе и збивчивѣе другихъ; то; чтобы сдѣлать выборъ ихъ надежнѣе, предпишемъ слѣдующее правило:

210. *Если между линейями или количествами, изъ которыхъ каждое будучи взято за неизвѣстное, можетъ опредѣлить всѣ прочія количества, найдутся два такія, которыя служатъ одинакимъ образомъ, и выводятъ сходныя эквации, кромѣ знаковъ; то не должно*

употреблять ни того, ни другаго, но избрать неизвѣстнымъ такое, которое бы зависѣло отъ нихъ обѣихъ; на примѣръ, можно брать за неизвѣстное полусуммы ихъ или полразности, или среднее пропорціональное количество, или и проч.; употребляя сіи послѣднія количества, получишь экваціи проще и легче тѣхъ, какія могутъ выпити изъ вышеобъявленныхъ.

Слѣдующій вопросъ увѣритъ насъ въ томъ самымъ дѣломъ.

211. Изъ точки D (фиг. 23), лежащей въ прямомъ углѣ IAE и равно отстоящей отъ боковъ IA и AE, провести прямую линію DV такъ, чтобъ часть CV, заключающаяся въ прямомъ углѣ EAV была равна данной линіи.

Опустивъ перпендикуляры DE, DI, могу взять безъ различія неизвѣстнымъ количествомъ CE или AV, AC или IV, CD или DV. Еслили возьму CE неизвѣстнымъ, то назвавъ количество сіе x , и означивъ чрезъ a каждую изъ линій равныхъ DE, DI, которыя предполагаются извѣстными, а чрезъ c данную линію, которой VC должна быть

равна, получу $AC = AE - CE = a - x$; в подобных треугольниках DEC, САВ найду АВ сѣдующею посылкою $CE : DE = AC : AB$, то есть, $x : a = a - x : AB$, и сѣд. $AB = \frac{aa - ax}{x}$. По свойству прямо-угольнаго треугольника АСВ (Геом. 164) получу $(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$; вставивъ въ мѣсто сихъ линей Алгебраическія величины, выведу $(a - x)^2 + \frac{(aa - ax)^2}{xx} = cc$, или $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc$, или по уничтоженіи знаменателя, по пересѣлкѣ членовъ и по приведеніи $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$ уравненіе четвертой степени, которое не такъ - то легко можно употребить къ рѣшенію предложеннаго вопроса.

Если въ мѣсто СЕ возьму неизвѣстнымъ ІВ, то назвавъ ІВ x , и поступая по предыдущему образцу рѣшенія, получу эквацию, которая будетъ разниться съ найденною въ томъ только, что заключаетъ въ себѣ $x - a$ вмѣсто $a - x$, но въ прочемъ совершенно такая же; ибо количества сіи въ той и другой должны быть возведены во вторую степень. Такимъ же образомъ уравненіе, для котораго АВ взята будетъ за неизвѣстное количество, и въ чемъ, кромѣ

знаковъ не будетъ отличаться отъ того, гдѣ АС возьмешь неизвѣстнымъ. Что принадлежитъ до DB и DC, то эквации ихъ будущъ также, кромѣ знаковъ, во всемъ сходствовать между собою; и такъ не надобно брать никакой изъ этихъ линий.

Напримѣвъ есѣли возьмемъ за неизвѣстное сумму двухъ линий DB и DC, и представимъ ее чрезъ $2x$, то получимъ (Геом. 305) $DB = x + \frac{1}{2}c$, а $DC = x - \frac{1}{2}c$; примемъ же по причинѣ параллельныхъ DI и СА можно сыскать АВ и АС слѣдующими двумя послѣдками $DC : CB = IA$ или $DE : AB$, и $DB : CB = DI : AC$; то есть, $x - \frac{1}{2}c : c = a : AB$, и $x + \frac{1}{2}c : c = a : AC$; слѣд.

$AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$ и $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; а какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ САВ (Геом. 164) $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, то по вставкѣ величинъ сихъ линий получаю...

$$\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$$
, или по уничтоженіи дробей и по раздѣленіи на cc , $a^2(x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2(x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2(x - \frac{1}{2}c)^2$, по совершеніи означенныхъ дѣйствій, по переставкѣ членовъ и по приведеніи получаю наконецъ $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$ хотя уравненіе также четвертой степени, но такое, которое гораздо

легче можно рѣшить предыдущаго, потому что оно рѣшится (141) на подобіе уравненій второй степени.

Можно также вывести довольно легкія и простыя уравненія, употребивши два независимыхъ, изъ которыхъ бы одно представляло сумму двухъ линей АВ и АС, а другое ихъ разность: на примѣрѣ если сдѣлаю $AB + AC = 2x$, а $AB - AC = 2y$, то произойдетъ $AB = x + y$, а $AC = x - y$; въ прямоугольномъ треугольникѣ АВС получаю $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, а въ треугольникахъ АВС, ІВД подобныхъ между собою $AB : AC = IB : ID$; отсюда выходящъ два уравненія, по которымъ безъ всякаго труда опредѣлены будутъ x и y , потому что если изъ перваго выведешь величину xx , и вступишь ее во второе, то получишь для величины y эквацію второй степени. Но мы оставимъ начинающимъ докончать эту выкладку, и приступимъ къ прежнему уравненію.

Въ сходственность (141) выходитъ $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 = (\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; по извлеченіи квадратнаго корня $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm \sqrt{aacc + a^4}$, и слѣд. $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}$; нако-

нецъ по новомъ извлеченіи квадратнаго кор-
ня получаю $x = \pm \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}]}$, или $x = \pm \sqrt{[(\frac{1}{4}cc + aa \pm a\sqrt{(cc + aa))}]}$.

Изъ четырехъ величинъ x , какія предста-
вляютъ двоякое соединеніе знаковъ \pm одна толь-
ко годится для настоящаго вопроса, именно
 $x = + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}]}$.

Величина $x = + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + aa)}]}$ разрѣшаетъ тотъ же вопросъ,
но въ такомъ случаѣ, когда потребуется,
чтобы точка СВ находилась въ одномъ углу
съ точкою D (См. фиг. 24); тогда x
представляетъ уже не половинную сумму,
но половинную разность линей DB и DC; въ
этомъ случаѣ можно увѣриться, изъ бра-
зивши сію разность чрезъ $2x$ и рѣшивши
задачу по вышеозначенному образцу; ибо
BD въ семъ случаѣ будѣтъ $= \frac{1}{2}c + x$, CD
 $= \frac{1}{2}c - x$; по причинѣ параллельныхъ DI
и CA можно положить $DB : CB = DI : CA$
и $DC : CB = AI : AB$, или $\frac{1}{2}c + x : c =$
 $a : CA$, и $\frac{1}{2}c - x : c = a : AB$; слѣд.
 $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$, а $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$; въ прямо-
угольномъ треугольникѣ САВ получимъ...
 $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$; наконецъ по со-

вершеніи означенныхъ дѣйствій будемъ имѣть
 $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa) x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$
 точно такое же уравненіе, какое мы прежде
 нашли для суммы двухъ линей BD и CD
 (фиг. 23). А какъ одна и та же эквація
 рѣшитъ вопросъ на два случая, то должно,
 чтобъ одинъ изъ корней ея представлялъ
 сумму, а другой разность,

Что касается до двухъ прочихъ корней, то для
 свѣденія ихъ случаевъ, къ которымъ они относятся,
 должно примѣнить, что даннымъ вопросомъ, или
 лучше выведеннымъ изъ него уравненіемъ не опре-
 дѣляется точнаго положенія точки D, но естъ, на-
 ходится ли эта точка снизу AГ (фиг. 23) и влѣво
 отъ АЕ, или выше первой и вправо отъ второй,
 какъ то видѣнь можно изъ положенія ея въ разсуж-
 деніи А'Г' и А'Е'; а какъ въ последнемъ положеніи
 точки D количесиво a упадетъ совсемъ въ про-
 шивныя спорныя и ситановишя отрицательнымъ, то
 для приличнаго рѣшенія настоящихъ случаевъ долж-
 но въ наидени мѣ уравненіи $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa) x^2$ и
 проч. поставишь $-a$ вмѣсто $+a$. Но послѣду эква-
 ція послѣ сего дѣйствія не перемѣняеяся, то она
 должна рѣшишь два и выше случая; почему изъ двухъ
 остальныхъ величинъ x одна должна представлять
 сумму линей DV' и DU' (фиг. 23) а другая разность
 ихъ (фиг. 24).

Производство конструкцій для первыхъ
 двухъ величинъ состоить въ слѣдующемъ: по-
 ложи на продолженіи EA (фиг. 23 и 24)
 часть AN = c , и по проведеніи IN пере-
 неси ее на продолженіи DI изъ I въ K; на
 DK, какъ на діаметръ, опиши полкруга
 KLD, пересѣкающійся въ L продолженіемъ AI.

Изъ середины Н linee AN проводи ІН и положи ей равную lineю изъ І въ М (*фиг. 23*); lineя LM представишь первую величину x ; но въ *фигурѣ 24*, изъ точки L какъ изъ центра и радіусомъ равнымъ ІН пересѣки малою дугою lineю ІК въ точкѣ М, ІМ будетъ служишь второю величиною x ; а какъ $BD = x + \frac{1}{2}c$, то для *фигуры 23* получишь $BD = LM + AN$, а для *фигуры 24* $BD = IM + AN$; напоследокъ изъ точки D какъ изъ центра и радіусомъ BD, которой сдѣлался теперь опредѣленнымъ, пересѣки дугою продолженіе lineи AI въ точкѣ В, отъ чего произойдетъ искомая lineя BD. Ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ ІАН (*фиг. 23* и *24*) ІН или ІК $= \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(aa + cc)}$, а поелику LI есть средняя пропорціональная между DI и ІК, то $LI^2 = DI \times IK = a \sqrt{(aa + cc)}$; при томъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ІАН гипотенуза ІН или ІМ $= \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(ai + \frac{1}{4}cc)}$; слѣд. въ прямоугольномъ треугольникѣ LIM (*фиг. 23*) $LM = \sqrt{(MI^2 + IL^2)} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a \sqrt{(ai + cc)}]} = x$, но (*фиг. 24*) $IM = \sqrt{(LM^2 - IL^2)} = \sqrt{[(aa + \frac{1}{4}cc - a \sqrt{(aa + cc)})]} = x$.

Должно замѣтить здѣсь, что линия IN (фиг. 24) въ конструкціи послѣдней величины x предполагается больше или по крайней мѣрѣ равна LI . Еслижъ она будетъ меньше, то задача сдѣлается невозможною. Ибо если въ величинѣ $x = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc} - a \sqrt{(aa + cc)}$ количество $aa + \frac{1}{4}cc$, то есть $(IN)^2$ будетъ меньше $a \sqrt{(aa + cc)}$, то есть, $(IL)^2$, въ такомъ случаѣ радикальное количество сдѣлается отрицательнымъ, и слѣд. величина x превратится въ мнимую.

212. Принимая за неизвѣстное количество сумму линий BD и DC (фиг. 23) или разность ихъ (фиг. 24), вывели мы уравненіе проле того, какое происходитъ отъ принятія CE , или AC , или AB , или IB по той причинѣ, что отношеніе линий DB и DC къ линейамъ IB и AB подобно отношенію, какое имѣютъ тѣжъ линии DB и DC къ линейамъ AC и CE ; то есть, онѣ могутъ быть опредѣлены сходными дѣйствіями чрезъ допущеніе какъ IB и AB , такъ AC и CE .

Поелику вообще уравненіе должно заключать въ себѣ всѣ различныя отношенія искомаго количества къ тѣмъ, отъ которыхъ оно зависитъ; то уравненіе бываетъ тѣмъ

проще, чѣмъ неизвѣстное имѣть меньше отношеній къ другимъ.

213. Положимъ, что $ABED$ (фиг. 25) представляешь шаръ, произшедшій изъ обращенія полукруга ABE около діаметра AE . Кривой секторъ ABC производилъ при семъ обращеніи сферической секторъ, состоящій изъ сферическаго сегмента и конуса: сегментъ раздѣленъ отъ обращенія половины круговаго сегмента ABP , а конусъ отъ обращенія прямоугольнаго треугольника BPC . *Спрашивается, въ какомъ мѣстѣ сферической сегментъ и конусъ будутъ равны между собою?*

Для рѣшенія сего вопроса надлежитъ припомнить (Геом. 247), что сферической секторъ равенъ произведенію площади выпуклаго круга BAD на третью радіуса AC . Площадь же сего круга находится (Геом. 226) умноженіемъ окружности $ABED$ на высоту AP . И такъ представивъ содержаніе радіуса круга къ окружности чрезъ $r : c$, и положивъ при томъ $AC = a$, $AP = x$, получимъ окружность $ABED$ чрезъ слѣдующую пропорцію $r : c = a : ABED$; слѣд. окружность $ABED$ будетъ состоять изъ $\frac{ca}{r}$, площадь выпукла-

го круга изъ $\frac{сax}{r}$, а толщина сектора изъ $\frac{сax}{r} \times \frac{1}{3} a$ или изъ $\frac{саax}{3r}$.

Для опредѣленія толщины конуса должно умножить площадь круга, которой служилъ ему основаніемъ, то есть, площадь круга, имѣющаго полупоперешникомъ ВР, на треть высоты СР; но поелику $СР = АС - АР = a - x$ и $СВ = a$, то въ прямоугольномъ треугольникѣ ВРС получимъ $ВР = \sqrt{(СВ^2 - СР^2)} = \sqrt{(aa - aa + 2ax - xx)} = \sqrt{(2ax - xx)}$; потомъ высказавъ окружность круга, имѣющаго радиусомъ ВР, посылкѣ $r : c = \sqrt{(2ax - xx)}$ къ четвертому члену, которой будетъ $c \sqrt{\frac{(2ax - xx)}{r}}$; умноживъ сію окружность на половину радиуса $\sqrt{(2ax - xx)}$, получимъ $c \cdot \frac{(2ax - xx)}{2r}$ количество, представляющее площадь основанія конуса; умноживъ сію площадь на треть высоты СР, то есть на $\frac{a - x}{3}$, опредѣлимъ толщину конуса чрезъ $\frac{c \cdot (2ax - xx)}{2r} \times \frac{a - x}{3}$; а какъ сегментъ и конусъ предполагаются въ требованіи равны между собою, то секторъ составляя сумму обоихъ долженъ быть вдвое больше каждаго изъ ихъ тѣлъ, и слѣд.

$$\frac{cax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a - x}{3}, \text{ или по уни-}$$

$$\text{чиженіи 2 общаго фактора въ числительѣ}$$

$$\text{и знаменателѣ } \frac{cax}{3r} = \frac{c \cdot (2ax - xx) \cdot (a - x)}{3r}.$$

Это уравненіе должно рѣшить вопросъ. Для приведенія его въ простѣйшій видъ уничтожаю r общаго дѣлителя и cx общаго множителя въ обѣихъ частяхъ, отъ чего происходитъ $aa = (2a - x) \cdot (a - x)$, или $ax - 3ax = -aa$; отсюда по правиламъ не вѣго ошдѣленія получаю $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$. По извѣ двухъ сихъ рѣшеній одно только $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ годится, потому что величина $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ превращая $2a$, то есть, будучи больше цѣлаго діаметра, не можетъ относиться къ шару.

Чтобъ сдѣлать конструкцію по рѣшенію $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, то перемѣни напередъ его въ слѣдующій видъ $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; потомъ взявши $AM = \frac{3}{2}a$, опиши на AM , какъ на діаметрѣ полукруга AOM ; положи изъ A въ O хорду $AO = a$ и проводи OM , которую перенеси изъ M въ P къ сторонѣ A ; точка P , гдѣ кончится сія линия, опредѣлитъ высоту AP или x ; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ AOM получимъ OM или $PM = \sqrt{(AM^2 - AO^2)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{4}aa - aa\right)}; \text{ слѣд. } AP = AM - PM \\ = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{3}{4}aa - aa\right)} = x.$$

Что принадлежитъ до втораго рѣшенія $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}aa\right)}$, то оно, какъ ска-
зали мы уже выше, не годится для насто-
ящаго вопроса, но относится равно какъ
и первое къ другому отвѣченному вопросу
такому, какой можно вывести изъ чтенія
эквации $xx - 3ax = -aa$, или $3ax - xx = aa$;
именно на известной линіи AN (фиг. 26),
которая раздѣлена на три равныя ча-
сти въ точкахъ B и D найти такую точ-
ку P, чтобъ часть AD была среднею про-
порціональною между разстоянїемъ точ-
ки P отъ концовъ A и N. Въ самомъ дѣ-
лѣ представивъ прѣшь AD данной линіи
AN чрезъ a , и AP чрезъ x , получимъ PN
 $= 3a - x$; припомъ изъ предположенныхъ
въ вопросѣ условій выведемъ слѣдующую
пропорцію $x : a = a : 3a - x$, а отсюда
такую эквацию $3ax - xx = aa$, для ко-
торой служатъ двумя корнями тѣжѣ $x =$
 $\frac{3}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}aa\right)}$, какіе найдены выше. Кон-
струкція для обоихъ остается предыдущая,
кромѣ того только, что для втораго кор-
ня, именно для $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\left(\frac{5}{4}aa\right)}$, дол-
жно перенести MO изъ M въ P' къ сторонѣ

Н, и въ такомъ случаѣ АР и АР' будутъ представлять величины x .

*О нѣкоторыхъ другихъ Прилѣженіяхъ
Алгебры къ разнымъ предметамъ.*

214. Поелику Геометрическія тѣла встрѣчаются часто въ задачахъ, особенно въ (Физикоматематическихъ; и для того нужно познакомиться намъ теперь съ Алгебраическими изображеніями какъ ихъ цѣлости, такъ и частей. Это не только будетъ полезно въ послѣдствіи сего курса, но и еще покажетъ намъ, какъ посредствомъ Алгебры сравнивая извѣстные тѣла, можно находить мѣру для другихъ, которыя имѣютъ къ нимъ отношеніе.

Если представимъ вообще чрезъ $r : c$ содержаніе радіуса къ окружности круга (содержаніе, какое извѣстно (Геом. 146) съ довольною точностію для практики); тогда окружность всякаго другаго круга, коему радіусомъ служитъ a , становится $\frac{ca}{r}$, а площадь $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2} a$ или $\frac{ca^2}{2r}$.

Изъ сего явствуетъ, что площади круговъ содержатся между собою, какъ квад-

рашы ихъ радіусовъ; ибо $\frac{c}{2r}$ остається одинакой величины, но $\frac{ca^2}{2r}$ возрастаетъ пропорціонально a^2 .

Еслии представимъ чрезъ h высоту цилиндра, котораго радіусомъ въ основаніи служить a , то получимъ (Геом. 237) $\frac{ca^2}{2r} \times h$ за толщину его. по той же причинѣ получимъ $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$ за толщину другаго цилиндра, коего высота h' а поперешникъ основанія a' ; и такъ толщины сихъ двухъ цилиндровъ будутъ содержаться между собою какъ $\frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$, или $a^2h : a'^2h'$ по уничтоженіи общаго фактора $\frac{c}{2r}$; то есть, толщины цилиндровъ находяся между собою какъ произведенія высотъ ихъ на квадраты радіусовъ основанія ихъ. Еслии высоты пропорціональны поперешникамъ основаній, то выходитъ $h : h' = a : a'$, и слѣд. $h' = \frac{ha'}{a}$; содержаніе $a^2h : a'^2h'$ становится въ такомъ случаѣ $a^2h : \frac{a'^3h}{a}$; или (по уничтоженіи общаго фактора h и по умноженіи на a) $a^3 : a'^3$; то есть, толщины цилиндровъ содержащаяся между собою, какъ кубы поперешниковъ основанія ихъ.

Вообще мѣра поверхноспей состоить, какъ мы по видѣли въ Геометріи, изъ произведенія двухъ просяженій, а мѣра тѣла изъ произведенія трехъ просяженій; слѣд. есплы просяженія двухъ тѣла или двухъ поверхноспей будутъ находиться между собою въ одинакомъ содержаніи, то площади ихъ содержатся въ такомъ случаѣ, какъ квадраты, а тѣла, какъ кубы сходственныхъ просяженій. Изъ сего заключимъ, что есплы два какія нибудь количества одного свойства будутъ изображены произведеніемъ произвольнаго числа факторовъ, и когда приномъ каждой факторъ одного количества къ каждому фактору другаго содержится одинаково, то оба такіа количества будутъ содержаться между собою, какъ сходственные ихъ факторы, возведенные въ такую степень, сколько всѣхъ ихъ находится въ каждомъ количествѣ.

На примѣръ есплы одно количество будетъ изображено чрезъ $abcd$, а другое чрезъ $a'b'c'd'$, то сіи количества должны содержаться между собою $= abcd : a'b'c'd'$; еспли же приномъ будетъ доказано, что $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$, то изъ сихъ содержаній можно вывесити такіа уравненія $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, и слѣд. со-

держаніе $abcd : a'b'c'd'$ превратится послѣ сего въ $abcd : \frac{a'^4bcd}{a^3}$, или въ $a : \frac{a'^4}{a^3}$, или наконецъ въ $a^4 : a'^4$.

Такимъ же образомъ должны содержаться не только одночленные количества, но и многочленные. На примѣрѣ если изъ предидущихъ количествъ одно было бы изображено чрезъ $ab + cd$, а другое чрезъ $a'b' + c'd'$, то они должны, когда протяженія ихъ пропорціональны между собою, содержаться одно къ другому $= a^2 : a'^2$. Ибо по предположеніи $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$, получаемъ $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, и слѣд. содержаніе $ab + cd : a'b' + c'd'$ перемѣняется послѣ сего въ $ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}$, или въ $ab + cd : \frac{a'^2ab + a'^2cd}{a^2}$, или въ $a^2 (ab + cd) : a'^2 (ab + cd)$, или наконецъ въ $a^2 : a'^2$.

Сіе послѣднее наблюденіе доказываетъ всеобщимъ образомъ, что площади подобныхъ фигуръ содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ, а толщины подобныхъ тѣлъ, какъ кубы; ибо какъ бы впрочемъ ни были фигуры и тѣла, первыя можно всегда почитать составлен-

ными изъ подобныхъ треугольниковъ, коихъ высоты и основанія пропорціональны въ каждой фигурѣ, а послѣднія изъ подобныхъ пирамидъ, которыхъ при протяженіи также пропорціональны.

Отсюда явствуетъ, съ какою легкостію можно сравнивать всѣ количества, коимъ дано Алгебраическое изображеніе; нѣтъ ни малой нужды до того, что оныя количества будутъ одного рода, или разнаго, какъ на примѣрѣ конусъ и шаръ, призма и цилиндръ; лишь бы только они были одного свойства, то есть, лишь бы количества сіи были или оба тѣлами, или оба поверхностями, или оба и проч.

На примѣрѣ естлии пожелаемъ сравнить площади съ поверхностями и линиями, то представивъ площади двухъ тѣлъ чрезъ V и u , поверхности ихъ чрезъ S и s , а сходственные ихъ линей чрезъ L и l , получимъ $V : u = L^3 : l^3$, или $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} = L : l$. Равномѣрно $\sqrt[3]{S} : \sqrt[3]{s} = L : l$; слѣд. $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{S} : \sqrt[3]{s}$, или $V : u = \sqrt[3]{S^3} : \sqrt[3]{s^3}$; или $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{u^2} = S : s$; изъ сего не трудно примѣнить, что поверхности увеличиваются въ меньшемъ содержаніи пропвиу тѣлъ.

215. Поелику извѣстно (Геом. 243), какимъ образомъ находится площадь усѣченной пирамиды или усѣченного конуса; то представивъ чрезъ b высоту цѣлой пирамиды, а чрезъ h' высоту пирамиды усѣченной; чрезъ s поверхность нижняго основанія, а чрезъ s' поверхность верхняго основанія, получимъ

Часть III. С

(Геом. 202) $s : s' = h^2 : h'^2$, и слѣд. $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$, или $h' = h \sqrt{\left(\frac{s'}{s}\right)}$; пономъ представивъ чрезъ h высоту усѣченной пирамиды, получимъ $k = h - h'$, и слѣд. $k = h - h \sqrt{\left(\frac{s'}{s}\right)}$, или $k = \frac{h \sqrt{s} - h \sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$; изъ сего выходящъ $h = \frac{k \sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. А какъ толщина цѣлой пирамиды состоятъ изъ $s \times \frac{h}{3}$, усѣченной изъ $s' \times \frac{h'}{3}$, или (по вставкѣ найденной величины h') изъ $s' \times \frac{h}{3} \sqrt{\frac{s'}{s}}$; слѣд. толщина усѣченной пирамиды будетъ состоятъ изъ $\frac{hs}{3} - \dots$ $\frac{hs' \sqrt{s'}}{3 \sqrt{s}}$, или $\frac{h}{3} \cdot \left(s - \frac{s' \sqrt{s'}}{\sqrt{s}} \right)$, или наконецъ изъ $\frac{h}{3} \cdot \left(\frac{s \sqrt{s} - s' \sqrt{s'}}{\sqrt{s}} \right)$; поставивъ теперь вмѣсто h найденную его величину, получимъ $\frac{k \sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \left(\frac{s \sqrt{s} - s' \sqrt{s'}}{\sqrt{s}} \right)$, по приведеніи $\frac{h}{3} \left(\frac{s \sqrt{s} - s' \sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}} \right)$, или наконецъ по раздѣленіи на $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$ будемъ имѣть $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$ такую величину, которая показывается намъ, что всякая усѣченная пирамида или конусъ состоятъ изъ трехъ пирамидъ одинакой высоты, изъ которыхъ основаніемъ первой служить нижнее основаніе s усѣченной пирамиды, второю верхнее основаніе s' , а третьей среднее пропорціональное $\sqrt{ss'}$ между нижнимъ основаніемъ s и верхнимъ s' ; ибо для опредѣленія толщины сихъ трехъ пирамидъ надлежитъ (по причинѣ, что всѣ онѣ имѣютъ одинакую высоту) сложить основанія ихъ, то есть, $s + \sqrt{ss'} + s'$, и умножить пономъ сумму сію

на третью $\frac{k}{3}$ общей высоты, что вЪ точности сход-
ствуетъ съ найденнымъ количествомъ.

216. Если представить чрезъ a полу-
поперешникъ шара, то площадь большаго
его круга должна состоять изъ $\frac{ca^2}{2r}$; поверх-
ность сего шара изъ $\frac{4ca^2}{2r}$, или изъ $\frac{2ca^2}{r}$, и
слѣд. толщина его (Геом. 223 и 224) изъ
 $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{1}{a}$, или $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$.

Если возьмемъ x за высоту какого
нибудь сегмента, то получимъ, какъ ви-
дѣть можно изъ рѣшенія послѣдняго вопро-
са (213), $\frac{caax}{3r}$ за толщину сектора, а $\frac{c}{2r}$
 $\times (2ax - xx) \times \frac{a-x}{3}$ за толщину кону-
са, которой составляетъ часть его; слѣд.
толщина сегмента будетъ состоять изъ
 $\frac{caax}{3r} - \frac{c}{2r} \cdot (2ax - xx) \cdot \frac{a-x}{3} = \frac{c}{3r} [aax$
 $- \frac{(2ax - xx)}{2} \times (a-x)] = \frac{c}{3r} \cdot \frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2}$
 $= \frac{c}{3r} \cdot \frac{3axx - x^3}{2} = \frac{c}{6r} \cdot (3ax^2 - x^3).$

Не трудно примѣнить послѣ сего, что
по извѣстнымъ Алгебраическимъ изображені-
ямъ количествъ можно рѣшить множество
вопросовъ, имѣющихъ къ нимъ отношеніе.

На примѣрѣ естьли пошребуется узнатьъ высоту такого конуса, конорой въ пошщину равенъ извѣстному шару, и коего пошпоперешникъ основанія равенъ пошпоперешнику шара; но предположивъ чрезъ h искомую высоту, чрезъ a радиусъ основанія, получимъ $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2 h}{3}$ за пошщину шребуемаго конуса; но поелику онъ долженъ быть равенъ шару, конорому пошпоперешникомъ служимъ также a , но выходитъ $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2 h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ такая эквація, по конорой опредѣляю $h = 4a$ по уничпоженіи въ обѣихъ ея члснѣхъ общаго фактора $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2}{3}$.

Сія величина h показываетъ, что высота конуса должна быть вдвое больше діаметра шара, въ чемъ увѣриться можно также по Геометріи: ибо шаръ (Геом. 246) соснавляя $\frac{2}{3}$ описаннаго около него цилиндра, долженъ быть вдвое больше такого конуса, конорой будетъ имѣть одинакое основаніе и одинакую высоту съ нимъ цилиндромъ, но снѣ, онъ будетъ равенъ конусу одного съ нимъ основанія, но двойной высоты.

217. Предложимъ для втораго примѣра слѣдующій другой вопросъ.

По данному ебсу извѣстной мѣры пороха требуется опредѣлить протяженія цилиндрической мѣры, въ коей можетъ помѣститься данной ебсѣ пороха; содержаніе высоты къ діаметру основанія сей мѣры предполагается также извѣстнымъ.

Положимъ $m : n$ за содержаніе высоты къ діаметру, а x за высоту; $\frac{nx}{m}$ будетъ предсавлять въ такомъ случаѣ діаметръ, а $\frac{c}{8r} \times \frac{n^2 x^3}{m^2}$ пошщину цилиндра. Положимъ теперь p за вѣсъ такого количества пороха, коноре помѣстится въ цилиндрѣ, коего высота равна съ діаметромъ основанія, и коно-

раго подщина будетъ состоятъ изъ $\frac{c}{8r} \times a^3$; и такъ назвавъ Р всѣ даннаго количесва пороку, которое должно помѣститься въ требуемой вопросомъ мѣрѣ, получимъ $\frac{c}{8r} a^3 : \frac{c}{8r} \times \frac{n^2 x^3}{m^2} = p : R$; откуда выходишь $x = a \sqrt[3]{\left(\frac{m^2 R}{n^2 p}\right)}$.

Знавши, что цилиндръ 12 дюймовъ въ діаметрѣ и такой же высоты помѣщается въ себѣ близу 51 фунта пороку, можно узнать мѣру и другаго такого, въ конк рой входитъ $4\frac{1}{2}$ фунта, и котораго діаметръ составляетъ $\frac{3}{4}$ высоты. Ибо въ такомъ случаѣ a будетъ $= 12$, $p = 51$; $R = 4, 5$; $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$, и слѣд. получимъ $x = 6^{\frac{1}{2}}$, 47.

О кривыхъ Линейяхъ вообще и о Коническихъ Сѣченіяхъ въ особенности.

218. Между кривыми линейями, копоря разсматриваемъ Геометрія, однѣ бывають такого рода, что каждая ихъ точка можетъ опредѣлена быть одинакимъ закономъ, то есть, совершенно между собою сходными дѣйствіями и выкладками; въ другихъ же каждую точку надобно опредѣлять особеннымъ закономъ, то есть, выкладками и дѣйствіями, совершенно между собою различными; но разность сія сама подвержена также закону.

Что принадлежитъ до линей, начерченныхъ на бумагѣ случайно рукою писца, то такіа черпы хощя

но справедливости не могутъ быть предметомъ строгой Геометріи, однакожъ посредствомъ изслѣдованій ея приходимъ въ состояніе, такъ сказать, копировать по прямымъ и надежнымъ способамъ и такія изгибы линей, которыя, кажется, не подлежатъ никакому закону. Искусство соединять такимъ образомъ, помощію сходныхъ между собою отношеній, количества, кои въ подлинной законъ или совѣтъ неизвѣстенъ, или весьма сбивчивъ, починается немаловажнымъ, какъ въ Геометрическомъ, такъ и Алгебраическомъ ученіи.

Дабы пришло въ состояніе чертить кривыя линей, которыя будутъ составлять настоящий предметъ Геометріи, то должно напередъ знать законъ, которому подлежатъ разныя точки ихъ изгибовъ. Сей законъ познается разными образами: на примѣръ, чрезъ изслѣдованіе дѣлопроизводства при непрерывномъ описаніи кривыхъ линей; такого рода есть кругъ, который происходитъ отъ обращенія данной линей около данной точки, или чрезъ изслѣдованіе какого нибудь свойства, постоянно принадлежащаго каждой точкѣ кривой линей. Наконецъ законъ сей можетъ представленъ быть уравненіемъ; и какъ вообще послѣдній сей способъ надежнее и проще двухъ первыхъ открываетъ свойства, особенности и употребленіе кривыхъ линей, то мы намѣрены держаться его болѣе. Посмотримъ, какъ уравненіе можетъ изобразить натуру кривой линей: начнемъ разсматривать съ окружности круга; потому

что кривыя линии другого рода намъ еще не извѣстны.

219. Положимъ, что АМВ (фиг. 27) представляеть такую кривую линию, въ которой намъ не извѣстно другого свойства, кромѣ слѣдующаго: именно, что перпендикуляръ РМ, опущенной изъ какой нибудь ея точки М на линию АВ бываетъ всегда среднимъ пропорціональнымъ количествомъ между двумя частями АР и РВ. Посмотримъ, какъ можно помощію Алгебры опредѣлить каждую точку сей кривой линии и разныя ея свойства.

Естьли представимъ АВ чрезъ a , часть АР чрезъ x , и перпендикуляръ РМ чрезъ y , то РВ будетъ въ такомъ случаѣ равна $a - x$; а какъ РМ предположена среднею пропорціональною линеею между АР и РВ, то получимъ $x : y = y : a - x$, и слѣд. $yy = ax - xx$.

Вообразимъ теперь, что АВ раздѣлена на нѣкоторое число равныхъ частей, на примѣръ на 10, и изъ каждой точки раздѣленія поставлены перпендикуляры pm , pn , pi и проч. Не трудно послѣ сего примѣнить, что естьли въ найденной экваціи количество x предположено будетъ попеременно

равнымъ каждой изъ линей Ar , Ar и проч., то y сдѣлается равнымъ каждой сходственной линіи pt , pt и проч.; попому что уравненіе $yy = ax - xx$ показываетъ, что y остается вездѣ среднимъ пропорціональнымъ между x и $a - x$. И такъ можно опредѣлить каждую изъ точекъ сей кривой линіи, давая попеременно x многія разныя величины, и вычисляя попомъ сходственныя величины y . Вотъ и примѣръ:

Предположивъ a раздѣленнымъ на 10 равныхъ частей, получимъ $a = 10$, и слѣд. уравненіе перемѣнився въ $yy = 10x - xx$. Наконецъ полагая попеременно $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6, x = 7, x = 8, x = 9, x = 10$, будемъ имѣть сходственными величинами $y = \sqrt{9}, y = \sqrt{16}, y = \sqrt{21}, y = \sqrt{24}, y = \sqrt{25}, y = \sqrt{24}, y = \sqrt{21}, y = \sqrt{16}, y = \sqrt{9}, y = \sqrt{0}$; или $y = 3; y = 4; y = 4, 5; y = 4, 9; y = 5; y = 4, 9; y = 4, 5; y = 4; y = 3; y = 0$. Еслии величины сїи y будутъ перенесены на перпендикуляры, поставленные изъ сходственныхъ величинъ 1, 2, 3 и проч. x , то точки t, t , опредѣленные такимъ образомъ, должны опноситься къ кривой линіи такого свойства, коюрой каждой перпендикуляръ pt будетъ среднимъ пропорціональнымъ количествомъ между двумя частями Ar и pB прямой линіи AB , къ такой наослѣдокъ кривой линіи, копорая представляешъ, какъ мы по немедленно увидимъ, окружность круга.

А какъ всякой квадратной корень состоитъ изъ двухъ величинъ, изъ одной положительной, а другой отрицательной, то сверхъ найденныхъ нами величинъ y получимъ еще слѣдующія другія $y = -3; y = -4; y = -4, 5; y = -4, 9; y = -5; y = -4, 9; y = -4, 5; y = -4; y = -3; y = 0$.

Для опредѣленія точекъ кривой линии по симъ новымъ величинамъ y , надлежитъ въ сходственностъ нѣсколько разъ сказаннаго обѣ отрицательныхъ количествахъ, продолжить перпендикуляры pm , pn и проч. въ противоположную сторону, и продолжить изъ p въ m' количества pm' , pn' и проч., равныя каждому сходственному съ ними pm .

Если бы пожелаешь назначить больше точекъ на сей кривой линии, то раздели AB на большее число частей, на примѣръ на 100; то есть, сделай $a = 100$.

Величина $y = a$ показываетъ, что кривая линия сходится съ прямою AB въ точкѣ B , или что $x = a = 100$; ибо перпендикуляръ pn становится въ такомъ случаѣ равенъ нулю, и слѣд. не находится никакого разстоянія между точкою n и прямою линеею AB . Не трудно также примѣнить, что она должна сойтися съ AB и въ точкѣ A ; въ самомъ дѣлѣ поелику величина y въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ кривая линия встрѣчается съ прямою, должна равняться нулю; то дабы узнать оныя мѣста, должно въ уравненіи $yy = ax - xx$ предположить y равнымъ нулю, опъ чего она превратится въ $0 = ax - xx$; а какъ $ax - xx$ состоитъ изъ $x \times (a - x)$, то произведение сіе въ двухъ случаяхъ можетъ равняться нулю,

именно когда $x = 0$ и когда $x = a$; слѣд. на оборотъ y будетъ равняться нулю въ тѣхъ же двухъ случаяхъ; но явствуетъ, что $x = 0$ въ точкѣ А, и $x = a$ въ точкѣ В; и такъ кривая линия въ самомъ дѣлѣ сходится съ АВ въ точкахъ А и В.

Послѣ сего примѣра можно примѣнить, какимъ образомъ уравненіе служитъ къ опредѣленію разныхъ точекъ кривой линии. Мы увидимъ со временемъ и другіе примѣры, а теперь изъяснимъ нѣкоторыя нужныя въ послѣдующемъ употребленіи слова.

220. Когда нужно изобразить уравненіемъ натуру какойнибудь кривой линии, тогда опишемъ каждую изъ точекъ m , n и проч. или представляемъ ее относящуюся къ двумъ постояннымъ линиямъ АВ и ОАО, составляющимъ между собою извѣстной уголъ (острой, прямой или тупой); потомъ вообразивъ изъ каждой точки m параллельныя mr и mr' съ линиями ОАО и АВ, заключаемъ о положеніи сей точки. Она спланируется извѣстною точчасъ, какъ скоро узнаемъ величины mr' или Ар и rm , или какъ скоро узнаемъ одну какуюнибудь изъ сихъ линий и содержаніе ея съ другою.

И такъ подѣ словами : уравненіе изображаетъ нашу кривой линіи, мы не иное что разумѣмъ, какъ то, что уравненіе представляетъ для каждой точки *m* содержаніе между линіями *Ar* и *mr*, и слѣд. по извѣстной одной изъ нихъ эквація опредѣляетъ и другую; кривая линія почитается тѣмъ возвышеннѣйшаго порядка, чѣмъ сложнѣе бываетъ содержаніе.

Линіи *Ar* или *mr'*, измѣряющія разстояніе каждой точки *m* отъ одной ОАО изъ двухъ сравнительныхъ линій, называются *абсциссами*, а линіи *mr* или *r'A*, измѣряющія разстояніе отъ другой сравнительной линіи АВ, *ордонатами*; линія АВ называется *осью абсциссъ*, а линія ОАО *осью ордонатъ*. Точка А, откуда начинается счетъ абсциссамъ, именуется *началомъ абсциссъ*, а та, отъ которой счисляются ордонаты *Ar'* или *rm* *началомъ ордонатъ*; въ *фигурѣ 27* обѣ сіи точки представляютъ одна и та же А. Хотя можно считать абсциссы и ордонаты отъ разныхъ точекъ, однако безъ особенной причины дѣлать того не надобно; потому что лучше и простѣе вести для нихъ счетъ отъ одной и той же.

Линіи *Ar*, *rm* называются общимъ именемъ *координатами кривой линіи*; и при-

нимая ихъ, какъ принадлежащія равно всякой точкѣ кривой линии, называемъ ихъ сверхъ того *неопредѣленными*; самыя буквы x и y , которыя употребляются для означенія AP и PM , получаютъ тоже названіе.

221. Приступимъ теперь къ уравненію вышенайденному, и посмотримъ, какъ можно вывести изъ него свойства кривой линии.

1°. Изъ середины C линии AB проведемъ какой нибудь точкѣ M кривой линии прямую CM ; въ какомъ бы мѣстѣ это ни случилось, сдѣлавъ, треугольникъ MPC будетъ всегда прямоугольной, и слѣд. получимъ $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$, то есть, (поскольку $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$), $yy = \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; а какъ прямая MP или y служитъ повсюду среднею пропорціальною между AP и PB , то повсюду произойдетъ $yy = ax - xx$, и слѣд. повсюду будемъ имѣть также $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$, то есть, $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$; а какъ по извлеченіи квадратнаго корня выходитъ $MC = \frac{1}{2}a$, то должно заключить, что каждая точка M или m удалена равно отъ точки C ; слѣд. кривая линия состоитъ изъ окружности круга.

2°. По проведеніи изъ какой нибудь точки М или *m* кривой линіи къ концамъ А и В прямыхъ МА и МВ, получимъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ МРА и МРВ, $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$ и $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$, или вставивъ въ мѣсто сихъ количествъ Алгебраическія величины, $xx + yy = (AM)^2$, и $aa - 2ax + xx + yy = (MB)^2$; потомъ сложивъ оба сіи уравненія, и вставивъ въ мѣсто yy величину его $ax - xx$, будемъ имѣть $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$, то есть, $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; изображеніе сіе показываетъ свойство прямоугольнаго треугольника, и слѣд. по сему свойству можно заключить, что уголъ АМВ будетъ всегда прямой, на какомъ бы мѣстѣ кривой линіи ни была расположена точка М. (*Смотри Геом. 65.*)

3°. Если въ уравненіи $xx + yy = (AM)^2$ поставимъ въ мѣсто yy величину его $ax - xx$, то получимъ $(AM)^2 = ax$, изъ котораго произходитъ такая пропорція $a : AM = AM : x$, или $AB : AM = AM : AP$, то есть, хорда АМ бываетъ всегда среднею пропорціональною между діаметромъ АВ и отрѣзкомъ или абсциссою АР. (*Смотри Геом. 112.*)

Такимъ же образомъ можно сыскать всѣ свойства круга, доказанныя въ Геометріи, по одному предположенію, что ордоната PM или pt служитъ среднею пропорціональною между AP и PB или Ar и rB .

Мы счисляли доселѣ абсциссы отъ точки A начала діаметра; и пошому имѣли уравненіе $уу = ax - xx$. Естли же захочемъ считатьъ ихъ отъ центра, то есть, естли примемъ за абсциссы линей CP , Cr и проч., то представивъ каждую изъ сихъ линей чрезъ z , получимъ $CP = AC - AP$, то есть, $z = \frac{1}{2}a - x$, и слѣд. $x = \frac{1}{2}a - z$. И такъ вставивъ въ уравненіи $уу = ax - xx$ въ мѣсто x величину сію, получимъ $уу = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$, или по приведеніи $уу = \frac{1}{4}aa - zz$ такое уравненіе круга, въ копоромъ предполагающія координаты перпендикулярными, и начало ихъ въ центрѣ.

Изъ всякаго свойства, существенно относящагося къ каждой точкѣ кривой линии, можно вывести, по переведеніи его на Алгебраической языкъ, одинакое уравненіе для кривой линии; по крайней мѣрѣ можно вывести его всегда, пока будутъ служить одинакіе абсциссы и одинакіе ордонаты: когдажъ переѣмнися начало или направление коор-

донабѣ; или когда переимѣнится и то и другое, тогда выходитъ совсѣмъ различное уравненіе, однако той же степени. Мы теперь только что видѣли истинну сего въ сдѣланной переимѣнѣ для абсциссъ; ибо въ мѣсто уравненія $yy = ax - ax$ получили другое такое $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, которое, будучи выведено изъ перваго, имѣетъ основаніемъ тожѣ свойство; наконецъ еспли возмемъ за начало слѣдующее другое свойство, что каждое разстояніе МС бываетъ всегда одинаково и $= \frac{1}{2}a$, то назвавъ СР, z ; и РМ, y ; выведемъ по причинѣ прямоугольнаго треугольника МРС, $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, и слѣд. $yy = \frac{1}{4}aa - zz$ уравненіе такое же, какое вывели выше изъ другаго свойства.

О Э л л и п с и с ѣ.

222. Приступимъ теперь разсматривать свойство такой кривой линии, въ которой сумма двухъ разстояній $MF + Mf$ (фиг. 28), отъ каждой ея точки М къ двумъ другимъ постояннымъ F и f , бываетъ всегда равна данной линіи a .

Чтобъ сыскать свойство сей кривой линии, которая называется *эллипсисомъ*, должно сыскать уравненіе, которое бы изобразило, какое отношеніе находится, въ силу

извѣстнаго свойства, между перпендикулярами PM , проведенными изъ каждой точки M , на опредѣленную линію Ff и между разстояніями ихъ FP или AP отъ какойнибудь точки F или A , взятой произвольно.

Для такого предмета беру за начало абсциссъ точку A , которую опредѣляю положивши изъ середины C линіи Ff , линію $CA = \frac{1}{2} a$; попомъ сдѣлавши $CB = CA$, представляю AP чрезъ x , PM чрезъ y , линію AF , которая принимается за извѣстное количество, чрезъ c , а линію FM чрезъ z , и получаю $FP = AP - AF$ (*), $= x - c$; $MF = FMf - FM = a - z$, и $fP = PV - Vf = AB - AP - Vf = a - x - c$.

Прямоугольные треугольники FPM , fPM даютъ $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$ и $(Mf)^2 = (PM)^2 + (fP)^2$, или $zz = yy + xx - 2cx + cc$, и $aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + cc$. Вычисляю второе уравненіе изъ перваго и по уничтоженіи aa , нахожу $2az = 2ax + 2ac$

(*) Когда изъ точки M перпендикуляръ MP упадетъ между A и F , тогда FP должна равняться $c - x$; но это не дѣлаетъ никакой перемены въ окончательномъ уравненіи, потому что для вывода его употребляется квадратъ FP , но квадратъ сей производимъ изъ $c - x$ или $x - c$, состоятъ всегда изъ $xx - 2cx + cc$.

— $4cx$, слѣд. $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$. Вставивъ въ мѣсто z сію величину его въ уравненіи $zz = yу + xx - 2cx + cc$; получу $\frac{aaxx + 2aacsx + aacc - 4acx^2 - 4ac^2x + 4ccxx}{aa} = yу + xx - 2cx + cc$; по уничтоженіи знаменателя, по переставкѣ членовъ и по приведеніи $aaуу = 4aacsx - 4acccx - 4acx^2 + 4ccx^2$, или $aaуу = (4ac - 4cc)ax + (4cc - 4ac)x^2$, или по причинѣ; что $4cc - 4ac$ равно — $(4ac - 4cc)$, буду имѣть $aaуу = (4ac - 4cc)ax - (4ac - 4cc)x^2$; или наконецъ $aaуу = (4ac - 4cc)(ax - xx)$; послѣ чего выходитъ $yу = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$

Вотъ каково уравненіе для кривой линей, кошорой каждая точка имѣетъ выше означенное свойство.

223. Посредствомъ сего уравненія можно начертить кривую линейю такого рода чрезъ точки, принявъ за x разныя многія величины и сдѣлавши въ кладку величинамъ y , какъ показано было выше въ разсужденіяхъ нашихъ о кругѣ; но велику дѣлопроизводство оснѣается одинаково, томы оснѣвляемъ его.

224. Можно также начертить эллипсисъ посредствомъ точекъ слѣдующимъ другимъ способомъ: сдѣлай $CB = CA = \frac{1}{2}a$, и взявши какое нибудь разстояніе Br , засѣки изъ точки f , какъ изъ центра, радіусомъ Br сверху и снизу AB дуги, которыя изъ точки F , какъ изъ центра, радіусомъ Ar пересѣки

въ М и М'. Всѣ точки М и М', такимъ образомъ найденныя, будутъ принадлежать эллипсису.

225. Начальное свойство, по которому наша мы уравненіе, представляющъ само собою весьма простое средство начертить сію кривую линію чрезъ непрерывное движеніе. Оно состоятъ въ слѣдующемъ: выбери произвольно двѣ точки, какія на примѣрѣ; какъ F и f, и возьми въ точки сіи шнуръ съ привязаннымъ къ нимъ шнуркомъ, которой бы длиннѣ былъ разстоянія Ff; пономъ натягивая сей шнурокъ очерти посредствомъ шила М кривую линію; сія кривая линія представитъ эллипсисъ: ибо сумма разстояній шила отъ обѣихъ точекъ F и f будетъ повсюду равна двѣой длинѣ шнурка.

226. Изъ предыдущаго не трудно заключить, что кривая линія пройдетъ чрезъ точки А и В, потому что FMf взята равна АВ. Поелику Cf = CF, то и AF = Vf, слѣд. AF + Af = Af + Vf = a, и BF + Vf = BF + AF = a. Тожъ самое подтверждается и уравненіемъ; ибо для показанія тѣхъ мѣстъ, гдѣ кривая линія пересѣчетъ прямую продолженную Ff, надлежитъ сдѣлать y = 0; но изъ такого предположенія выходитъ $\frac{4ac - 4c^2}{aa} \cdot (ax - xx) = 0$; а какъ $\frac{4ac - 4c^2}{aa}$ не можетъ равняться нулю, то должно по уравненію ax — xx или x × (a — x) = 0; но это имѣетъ мѣсто въ двухъ случаяхъ, именно когда x = 0, то есть, въ точкѣ А, и когда x = a въ точкѣ В.

227. Эквация показываетъ также, что кривая линей простирается какъ сверху, такъ и снизу АВ, и что она остается одинакою въ обоихъ случаяхъ. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе $y = \pm \sqrt{\frac{aqc - qcc}{aa}} \cdot (ax - xx)$ изображаетъ, что для каждой величины x или АР находится двѣ величины y или РМ совершенно равныя; но какъ величины сіи имѣютъ противные знаки, то должны отношиться къ противнымъ сторонамъ.

Явствуетъ также, что если изъ середины С линей АВ поставится перпендикуляръ DD', то кривая линей раздѣлится онымъ на двѣ части совершенно равныя и подобныя между собою. Это неминуемо слѣдуетъ изъ самаго чертежа; но мы еще больше въ истиннѣ сего увѣримся, сдѣлавши со временемъ другія замѣчанія на показанное уравненіе.

228. Линей АВ называется *большою осью* эллипсиса, а линей DD' *меньшою осью*. Двѣ точки F и f называются *фокусами*. Точки А, В, D, D' суть *верхи осей*, а точка С *центръ* ихъ.

229. Если пожелаемъ узнать величину ордонаты Fm'', проходящей чрезъ фо-

жусѣ, то должно положить AP или $x = AF = c$; отъ чего произойдетъ $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}$
 $\times (ac - cc) = \frac{4 \cdot (ac - cc)^2}{aa}$; по извлеченіи
 квадратнаго корня $y = \pm \frac{2 \cdot (ac - cc)}{a}$;
 слѣд. $m''m''' = \frac{4 \cdot (ac - cc)}{a}$. Сія линия $m''m'''$
 называется *параметромъ* эллипсиса, и слѣд.
параметръ меньше *учетвереннаго разсто-*
янія с отъ фокуса потому, что величина его
 $\frac{4 \cdot (ac - cc)}{a}$ представляя поужь самое, что
 $4c - \frac{4cc}{a}$, неминуемо меньше $4c$.

Если представимъ величину параметра чрезъ p , то получимъ $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, и
 слѣд. $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4cc}{aa}$; почему найденное уравненіе для эллипсиса можно переменить въ
 слѣдующее другое $yy = \frac{p}{a} \cdot (ax - xx)$,
 которое гораздо проще.

230. Дабы узнать, что за величину представляетъ линия CD , то предположивъ
 въ экваціи $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$, что
 AP или x равна AC или $\frac{1}{2}a$, получимъ ...
 $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa)$, и по приведе-

ни $уу = ас - сс$; то есть, $(CD)^2 = ас - сс = с.(а - с) = AF \times BF$; изъ сего уравненія выходитъ слѣдующая пропорція $AF : CD = CD : BF$; слѣд. CD или *половина меньшей оси* служитъ *среднею пропорціональною* *линею* между *разстояніями* *какого нибудь фокуса* отъ *двухъ верховъ А и В*.

Поелику DD' есть одна изъ примѣчательнѣйшихъ линей въ эллипсисѣ, и потому вводится она въ уравненіе предпочтительнѣе линей AF или c . Въ сообразность сего введенія назовемъ b сію линейю DD' ; послѣ чего линейя $CD = \frac{b}{2}$; а какъ только теперь нашли мы, что $(CD)^2 = ас - сс$, то получаемъ $\frac{bb}{4} = ас - сс$, или $bb = 4ас - 4сс$; слѣд. уравненіе эллипсиса можеть перемѣниться въ $уу = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$.

А какъ $p = \frac{4ас - 4сс}{a}$, или $pa = 4ас - 4сс$, и $bb = 4ас - 4сс$, то по симъ двумъ уравненіямъ заключаемъ, что $pa = bb$, и слѣд. по представленіи сего уравненія въ пропорціи $a : b = b : p$ находимъ, что *параметръ* *служитъ* *третьею пропорціональною* *линею* между *большою* и *меньшею осью*.

231. Если въ эквации $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ уничтожится знаменатель, то произойдетъ $aa yy = bb (ax - xx)$, и слѣд. $yy : ax - xx = bb : aa$; наконецъ обративъ вниманіе на то, что $ax - xx$ представляетъ поже, что $x \times (a - x)$, и вставивъ вмѣсто А. д. тебраическихъ количествъ самыя линии, получимъ $(PM)^2 : AP \times PB = (DD')^2 : (AB)^2$; то есть, *квадратъ всякой ордонаты къ большій оси эллипсиса содержится къ произведенію двухъ абсциссъ AP и PB такъ, какъ квадратъ меньшей оси къ квадрату большой.* А какъ это свойство относится ко всѣмъ точкамъ эллипсиса, то слѣдуетъ, что *квадраты ордонатъ содержатся между собою, какъ произведенія сходственныхъ абсциссъ.*

232. Разность между уравненіями эллипсиса $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ и круга, описаннаго по поперечнику АВ (фиг. 29), состоитъ (221) въ томъ только, что въ первомъ количество $ax - xx$ умножено на $\frac{bb}{aa}$, то есть, на содержаніе квадрата меньшей оси къ квадрату большой; и такъ представивъ всякую ордонату PN круга чрезъ z , получимъ $zz = ax - xx$; вставивъ въ эквации эллип-

сиса въ мѣсто ax — xx величину zz , будемъ имѣть $yy = \frac{bb}{aa} zz$, а по извлеченіи квадратнаго корня, $y = \frac{b}{a} z$, или $ay = bz$ такое уравненіе, изъ котораго выходитъ $y : z = b : a$, или $PM : PN = DD' : AB$ или $= CD : AC$ или CE . Слѣд. заключимъ по этой пропорціи, что *ордонаты эллипсиса состоятъ изъ ордонатъ круга, описаннаго на большой оси, только пропорціонально уменьшенныхъ, именно въ содержаніи большой оси къ меньшей.*

Отсюда явствуетъ, какъ должно чертить эллипсисъ посредствомъ круга. Не трудно также напомнить здѣсь, что самъ кругъ есть эллипсисъ, котораго обѣ оси a и b равны между собою, или котораго верхи осей опѣ фокуса равны половинѣ большой оси, или котораго параметръ наконецъ одинаковъ съ діаметромъ; ибо предположивши въ предыдущихъ уравненіяхъ $b = a$, или $c = \frac{1}{2}a$, или $p = a$, получимъ $yy = ax - xx$ уравненіе круга.

233. По найденнымъ экватіямъ должно заключить, что эллипсисъ не такъ, какъ кругъ, опредѣляется; для опредѣленія круга довольно одной линіи діаметра его, но для опредѣленія эллипсиса не довольно одной его большой оси AB (фиг. 28), а надобно еще знать или меньшую ось b или параметръ его p , или разстояніе c верха большой оси опѣ фокуса. Какъ должно чертить эллипсисъ по извѣстнымъ его большой оси и разстоянію c , это было показано выше; но чтобы описать его чрезъ непрерывное движеніе по даннымъ большой и меньшей осямъ, должно напередъ опредѣлить фокусы; а это сдѣлай такъ: возьми половину большой оси за радіусъ, и засѣки изъ конца P (фиг. 28) меньшей оси, какъ изъ центра, двѣ ду-

ди, пересекающія большую ось въ почкахъ F и f ; сии точки будутъ желаемые фокусы: ибо сумма двухъ разстояній $FD + Df$ должна равняться a , и сѣдѣ каждая изъ сихъ равныхъ между собою линей со-
споймѣ изъ $\frac{1}{2}a$.

Еслили будутъ даны большая ось и параметръ, то для опредѣленія мѣнливой оси должно сыскать среднюю пропорціональную между сими двумя линейми, чему научаетъ найденная выше (230) пропорція $a : b = b : p$.

234. Еслили чрезъ какую нибудь точку M эллипсиса (фиг. 28), продолжится линия fM изъ того или другаго фокуса до тѣхъ поръ, пока продолженіе MG будетъ равно другому разстоянію MF , и когда по соединеніи точекъ G и F линеею GF , проведется изъ точки M къ сей линіи перпендикуляръ MT , то сей перпендикуляръ будетъ служить тангенсомъ эллипсису.

Ибо по причинѣ равенства линей MF и MG , линия MT должна быть перпендикулярна къ серединѣ GF . Еслили изъ какой нибудь другой точки N сей же линіи проведутся двѣ прямыя NG и NF , то новыя сии линіи должны быть также равны между собою. Положимъ теперъ, что MT могла коснуться эллипсису и въ другой еще точкѣ, на примѣръ N ; тогда по проведеніи Nf должно вышши $FN + Nf$ равно $MF + Mf$,

или $GM + Mf$, то есть, Gf ; но Gf меньше $GN + Nf$, и слѣд. меньше $FN + Nf$; слѣд. точка N внѣ эллипсиса.

235. Углы FMO , OMG по сдѣланной конструкции равны между собою, и притомъ OMG равняется противоположенному себѣ fMN ; слѣд. FMO равенъ fMN . *И такъ двѣ линіи, простирающіяся отъ одной точки эллипсиса къ двумъ фокусамъ, составляютъ съ тангенсомъ равные углы.*

Опытъ научаетъ насъ, что лучъ свѣта, упавъ на поверхность, дѣлаетъ уголъ отраженія, равный паденію. Почему если F принята будетъ за точку, свѣтъ содержащую, то всѣ лучи, выходящіе изъ нее, упавши на изгибъ $МAM'$, должны собраться въ f , и на оборотъ.

Если изъ точки M поставится на линіи MT перпендикуляръ MI (которой будетъ также служить перпендикуляромъ и кривой линіи), то сей перпендикуляръ раздѣлитъ угловъ FMf на двѣ равныя части; ибо если изъ прямыхъ угловъ IMT и IMN вычтешь равные углы FMT и fMN , то остальные углы FMI и IMf будутъ также равны.

236. И такъ не трудно по силѣ сего опредѣлить величину разстоянія PI отъ ордонаты до мѣста, гдѣ ось пересѣкается перпендикуляромъ MI . Сія линія PI называется *поднормальною*, а MI *нормальною линіею*.

Для опредѣленія PI , должно напередѣ
 вычислить FI . Поелику уголъ Fmf раздѣ-
 денъ на двѣ равныя части, то $Mf : MF =$
 $fI : FI$ (*Геом.* 104); и слѣд. (*Геом.* 98)
 $Mf + MF : Mf - MF = fI + FI : fI - FI$;
 но $Mf + MF = a$, почему предсавивъ MF
 чрезъ z , какъ выше (222), получимъ $Mf =$
 $a - z$, и слѣд. $Mf - MF = a - 2z$; при-
 томъ же $fI + FI = Ff = AB - 2AF =$
 $a - 2c$, и $fI - FI = Ff - 2FI = a -$
 $2c - 2FI$; и для того вставивъ въ послѣ-
 дней пропорціи вмѣсто линей найденныя сіи
 величины, будемъ имѣть $a : a - 2z = a -$
 $2c : a - 2c - 2FI$; изъ сей пропорціи
 выходитъ такое уравненіе $aa - 2ac - 2a$
 $\times FI = aa - 2ac - 2az + 4cz$, по ко-
 торому заключаю, что $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, или
 вставивъ въ мѣсто z величину его $\frac{ax + ac - 2cx}{a}$,
 найденную (222), получаю $FI = \dots$
 $\frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$; но $FI = FP +$
 $PI = AP - AF + PI = x - c + PI$;
 слѣд. $PI = FI - x + c = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$
 $- x + c = \frac{2aac - 2acc - 4acx + 4ccx}{aa} =$
 $\frac{2a \cdot (ac - cc) - 4x \cdot (ac - cc)}{aa} = \frac{2a - 4x}{aa} \times (ac$
 $- cc)$, или вставивъ въ мѣсто $ac - cc$ вели-

чину его $\frac{bb}{4}$ (230), нахожу наконецъ $PI = bb \cdot \frac{(a - 2x)}{2aa}$, или $PI = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{2}a - x)$.

237. Можно также опредѣлить величину разстоянія РТ отъ ордонаты до пересѣченія тангенса; сіе разстояніе называется *субтангенсомъ*. Пелику треугольникъ ІМГ прямоугольной, и РМ представляетъ перпендикуляръ, опущенный изъ прямого угла, шо пріисходитъ (Геом. 112) слѣдующая пропорція $PI : PM = PM : PT$, шо есть, $\frac{bb}{aa} \times (\frac{1}{2}a - x) : y = y : PT$; слѣд. $PT = \frac{aoyy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$, или (по вставкѣ величины $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$ равной yy), $PT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x}$.

Посредствомъ Алгебраическаго изображенія двухъ линій РІ и РТ можно провести перпендикуляръ и тангенсъ ко всякой данной точкѣ М эллипсиса. Ибо, еслили точка М будетъ извѣстна, шо опустивъ перпендикуляръ МР, получимъ величину АР, x . А какъ количесва a и b предполагаются извѣстными, шо будетъ также извѣстно все, что относится къ величинамъ РІ и РТ.

238. По изображенію РТ можно заключить также, что тангенсы МТ эллипсиса и ТН (фиг. 29) круга, описаннаго на большой оси АВ (тангенсы, копорые приведены къ точкамъ N и M, гдѣ ордоната РМ эллипсиса пересѣкаетъ окружности обѣихъ кривыхъ линій) сойдутся въ одной точкѣ Т на продолженіи оси. Пелику въ изображеніи РТ выпорой оси b не находитися, шо сія линия РТ должна оспашься всегда

одинакою, пока a и x будутъ одинаковы. Почему всѣ тангенсы, проведенные къ сходственнымъ точкамъ всякаго рода эллипсовъ, начерченныхъ на большой оси АВ, должны неминуемо сойтися въ одной точкѣ Т.

239. Если къ РТ (фиг. 28) прибавишь $CP = \frac{1}{2}a - x$, то произойдетъ $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$, или по приведеніи всего въ дробь $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$, то есть, $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$. Изъ сего уравненія можно вывести слѣдующую пропорцію $CP : AC = AC : CT$.

240. Посредствомъ прямоугольнаго треугольника ТРМ можно получить изображение ТМ; ибо $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = [ax - xx + \frac{bb}{aa} (\frac{1}{2}a - x)^2] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

241. Если изъ какойнибудь точки М эллипсиса приведеши на меньшую ось DD' перпендикуляръ или ордонату MP', и попомъ DP' представиши чрезъ x' , а Mp' чрезъ y' , то произойдетъ $DP' = CD - CP' = CD - PM$, то есть, $x' = \frac{1}{2}b - y$, и слѣд. $y = \frac{1}{2}b - x'$. Равномѣрно получимъ $MP' = CP = CA - AP$, то есть, $y' = \frac{1}{2}a - x$, и слѣд. $x = \frac{1}{2}a - y'$. Вставивъ величины сіи x и y въ уравненіи

$yy = \frac{bb}{aa} (ax - xx)$, или $aa yy = bb (ax - xx)$, получимъ $\frac{1}{4} aabb - aabx' + aax'x' = \frac{1}{2} aabb - abby' - \frac{1}{4} aabb + abby' - bby'y'$, или по приведеніи $bby'y' = aabx' - aax'x'$; отсюда выходитъ $y'y' = \frac{aa}{bb} (ax' - x'x')$

подобное уравненіе тому, какое вывели мы для большой оси, и по которому можно сдѣлать тѣже заключенія, какія извѣстны выше, именно: *квадратъ ордонаты Р'М меньшей оси содержится къ произведенію двухъ абсциссъ DP' X P'D' такъ, какъ квадратъ большой оси къ квадрату меньшей*; ибо уравненіе сіе можетъ представлено быть слѣдующею пропорціею $y'y' : ax' - x'x' = aa : bb$, но $ax' - x'x'$ происходитъ изъ $x' (a - x')$, или $DP' X P'D'$. Можно заключить также, что *квадраты ордонатъ меньшей оси содержатся между собою, какъ произведенія сходственныхъ абсциссъ*; и что *эллипсисъ можно начертить посредствомъ круга, описаннаго на меньшей его оси, продолживъ ордонаты круга въ равномъ содержаніи меньшей оси къ большой*.

242. Изъ предыдущаго явствуетъ, что свойства второй оси во всемъ сходны съ

найденными свойствами первой, кромѣ нѣкоторыхъ отношеній къ фокусамъ.

Еслили нужно будетъ опредѣлить на второй оси сходственные линіи съ шбми; которыя мы опредѣляли на первой, то есть, $Р'Т'$, $Р'Т'$, $СТ'$ и $МТ'$ (убиг. 28), то весьма легко получить ихъ можно посредствомъ найденныхъ линій первой оси, имѣющихъ къ нимъ отношеніе, и помощью подобныхъ треугольниковъ, которые не трудно различить въ фигурѣ. Представивъ сіи линіи посредствомъ абсциссъ DP' или x' , получимъ всѣ тѣже изображенія, какія найдены выше въ x для соотвѣствующихъ линій первой оси.

Вторая ось имѣетъ также и *параметръ* свой; но параметръ сей не такого рода линія, которая проходитъ чрезъ фокусъ (потому что фокусовъ на второй оси не находится), а такая, которая состоитъ изъ третьей пропорціональной линіи ко второй и первой оси:

243. Доселѣ считали мы абсциссы отъ верху; еслижъ начнемъ считать ихъ отъ центра C , то представивъ абсциссу CP чрезъ z , получимъ AP или $x = \frac{1}{2}a - z$; вставивъ величину сію x въ уравненіи $yy = \frac{bb}{aa}$

$$\begin{aligned}
 & (ax - xx) \text{ и въ величинахъ } PI, PT, CT, \\
 & \text{и } (TM)^2, \text{ найдёмъ } yu = \frac{bb}{au} \cdot \left(\frac{1}{4} aa - zz \right); \\
 & PI = \frac{bbz}{au}; PT = \frac{\frac{1}{4} aa - zz}{z}, CT = \frac{\frac{1}{4} aa}{z}; (TM)^2 \\
 & = \left(\frac{1}{4} aa - zz + \frac{bbzx}{au} \right) \frac{\frac{1}{4} aa - zz}{zz}.
 \end{aligned}$$

244. Прямая линия МСМ', проведённая изъ какой нибудь точки М эллипсиса (фиг. 30) чрезъ средину С оси АВ, или чрезъ центръ и оканчивающаяся съ противоположной стороны на окружности эллипсиса, называется *діаметромъ* или *поперешникомъ*; линия же NN', проведенная параллельно чрезъ центръ С съ тангенсомъ МТ, которой простирается изъ верху М, называется *сопряженнымъ поперешникомъ*. Линия тО, упадающая на діаметръ ММ' параллельно съ МТ, именуется *ордонатою* его, а МО абсциссою. *Параметръ* діаметра ММ' состоитъ изъ третьей пропорціональной линии къ ММ' и NN'.

245. Мы наѣрены показать теперъ, что ордонаты тО всякаго поперешника имѣютъ сходныя свойства съ ордонатами осей.

Для доказательства сего опустимъ изъ точки т и О перпендикуляры тр, ОQ на ось АВ, потомъ проведи тS параллельную

сѣ тою же осью. По представленіи АВ чрезъ a , РМ чрезъ y , СР чрезъ z , QP чрезъ g , CQ чрезъ k , получишь $AP = \frac{1}{2}a - z$, $PB = \frac{1}{2}a + z$, $AP = CA - CP = CA - CQ - QP = \frac{1}{2}a - k - g$, $PB = CB + CP = \frac{1}{2}a + k + g$.

Изъ подобія треугольниковъ ТРМ, mSO выходитъ $TP : PM = mS$ или $pQ : SO$; то есть, $\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y = g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$ Изъ подобія треугольниковъ СМР, СОQ выходитъ $CP : PM = CQ : QO$, то есть, $z : y = k : QO = \frac{ky}{z}$; слѣд. $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. А какъ точка m принадлежитъ эллипсису, то слѣдуетъ (231), что $(pm)^2 : (PM)^2 = AP \times PB : AP \times PB$, то есть, $(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz})^2 : yy = (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z) \times (\frac{1}{2}a + z)$, или $\frac{kky}{zz} - \frac{2gkzy}{z(\frac{1}{4}aa - zz)} + \frac{ggzzy}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} : yy = \frac{1}{4}aa - kk - 2kg - gg : \frac{1}{4}aa - zz$, или по умноженіи крайнихъ и среднихъ (обративъ припомъ вниманіе на количества, которыя будутъ умножены и раздѣлены вмѣстѣ какъ на $\frac{1}{4}aa - zz$, такъ и на z), произойдетъ $\frac{kky}{zz} (\frac{1}{4}aa - zz) = 2gky + \frac{ggzzy}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa yy - kky - 2gky - ggy$, или по

раскрытіи члена $\frac{kkyu}{zz} (\frac{1}{4}aa - zz)$, по уничтоженіи количествъ $-kkyu$ и $-2gkyu$, который должны находиться въ обоихъ членихъ эквации, и по раздѣленіи на yu , получимъ наконецъ $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$ такое уравненіе, какое нужно для нашей цѣли; но прежде нежели сдѣлаемъ изъ него употребленіе, рассмотримъ его.

Естьли точка O , которую мы здѣсь предполагаемъ всякое мѣсто занимающею, упадемъ въ C , то есть, когда линия mo проходя чрезъ центръ, сдѣлается CN , тогда CK или k обратится въ нуль, а линия Qr или g въ CR . И такъ естьли въ найденномъ уравненіи допустишь $k = 0$, то по уничтоженіи знаменателя, по переславкѣ членовъ, наконецъ по приведеніи и раздѣленіи на $\frac{1}{4}aa$, произойдетъ $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; то есть, $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z)(\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

Сдѣлавъ сіе замѣчаніе, возвратимся къ своей цѣли; представимъ CM чрезъ $\frac{1}{2}a'$, CN чрезъ $\frac{1}{2}b'$, mo чрезъ y' , CO чрезъ z' . Изъ подобія треугольниковъ CPM , CQO выйдетъ $CM : CO = CP : CQ$, или $\frac{1}{2}a' : z' =$

$z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{4}a'a'}$. Треугольники CNR , mSO по при-
чинѣ параллельныхъ боковъ подобны, и для
того даюшъ $MO : mS = (N : (R$, или $y' : g$
 $= \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; слѣд. $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$.
Но какъ найдено выше, что $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa$
 $- zz$, то должно заключить, что $\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'} =$
 $\frac{1}{4}aa - zz$; откуда выходить $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$.
Если въ уравненіи $\frac{\frac{1}{4}aokk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa$
 $- gg$, вставимъ вмѣсто gg и kk найден-
ныя теперь величины, то получимъ $\frac{1}{4}aa$,
 $\frac{zzz z' - y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)} = \frac{1}{4}aa - \frac{\frac{1}{4}aa y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$
 $+ \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, или по приведенія и по раздѣле-
ніи на $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; или по уни-
чтоженіи знаменателей $\frac{1}{4}a'a'$ и $\frac{1}{4}b'b'$, $\frac{1}{4}b'b'z'z' =$
 $\frac{1}{4}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, и наконецъ $y'y' =$
 $\frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$; изъ сего уравненія про-
изходитъ слѣдующая пропорція $yy : \frac{1}{4}a'a' -$
 $z'z' = b'b' : a'a'$, то есть, $(mO)^2 : MO \times$
 $OM' = (NN')^2 : (MM')^2$. И такъ уравне-
ніе, относящееся къ двумъ какимъ нибудь
сопряженнымъ діаметрамъ, совершенно по-
добно выведенному нами для двухъ осей.

246. Если предположимъ $y' = 0$, то
получимъ $\frac{1}{4}a'a' - z'z' = 0$, и слѣд. $z' =$

$\pm \frac{1}{2} a'$. Изъ сего заключить должно, что эллипсисъ встрѣчается съ линеею MM' въ двухъ точкахъ M и M' , равно удаленныхъ отъ центра C ; слѣд. всѣ діаметры эллипсиса пересѣкаются въ центрѣ пополамъ.

247. Уравненіе $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (\frac{1}{4} a'a' - z'z')$, изъ котораго выходитъ $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4} a'a' - z'z')}$, показываетъ, что точка m' , произходящая отъ продолженія MO до тѣхъ поръ, пока Om' сдвѣгается $= Om$, будетъ принадлежать кривой линіи, и слѣд. каждой діаметръ эллипсиса раздѣляетъ пополамъ всѣ линіи, которыя проведены будутъ параллельно съ тангенсомъ, проходящимъ чрезъ начало его M .

248. Изъ сего можно заключить 1^е, что тангенсъ, проведенный къ концу N діаметра NN' , бываетъ всегда параллеленъ съ діаметромъ MM' . 2^е. Изъ того, что $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4} a'a' - z'z')}$ слѣдуетъ заключить, что ординаты Om діаметра MM' бываютъ одинаковы съ ординатами круга, которому поперешникомъ служишь MM' , уменьшаясь или увеличиваясь для сего послѣдняго въ содержаніи a' къ b' , и склоняясь подъ угломъ

равнымъ углу сопряженныхъ діаметровъ. Если $a' = b'$, то ордонаты сіи совершенно равны ордонатамъ круга. Наконецъ если нужно будетъ узнать, въ какомъ мѣстѣ эллипсиса оба сопряженные діаметры могутъ быть равны, то надлежитъ сыскать, въ какомъ мѣстѣ $CP = CR$, или $(CP)^2 = (CR)^2$, то есть, $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; а какъ изъ сей экваціи выходитъ $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{2}}$, то сдѣлай слѣдующую конструкцію. Опиши на большой оси АВ, какъ на діаметрѣ полкруга АНВ (*фиг. 29*), пересѣкающійся въ Е меньшею осью СД, и раздѣли дугу АЕ въ N'' на двѣ равныя части; потомъ продолживъ ордонату $N''P$, пересѣкающую эллипсисъ въ M'' и M' , проводи изъ сихъ точекъ къ центру CM'' и CM' : сіи линіи представляютъ два равные сопряженные діаметра. Ибо представивъ CP чрезъ z , получимъ въ прямоугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ CPN'' , котораго уголъ PCN'' равный ACN'' состоитъ изъ 45 градусовъ, $zz + zz = (CN'')^2 = \frac{1}{4}aa$; слѣд. $zz = \frac{1}{4}aa$, и $z = \sqrt{(\frac{1}{4}aa)} = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

249. Если изъ центра С (*фиг. 30*) поставленъ будетъ перпендикуляръ CF къ тангенсу $ТМ$, то по причинѣ подобія треугольниковъ $ТРМ$, $ТСF$ можно сдѣлать та-

кую посылку $TM : PM = CT : CF$, изъ которой выходитъ $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Равнобръно въ треугольникахъ TPM и CNR , подобныхъ по причинѣ параллельныхъ боковъ, можно послать $TM : PT = CN : CR$; слѣд. $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$. Изъ сихъ уравненій вывожу $CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, или по составленіи квадратовъ $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; но мы видѣли выше, что уу или $(PM)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - zz)$, $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{4}a^4}{zz}$, $(PT)^2 = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}$, и $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$ (245). И такъ вставивъ сіи количества, получу наконецъ по сдѣланіи надлежащаго приведенія $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16}aabb$, и слѣд. $CN \times CF = \frac{1}{4}ab$; но по проведеніи тангенса NT'' , пересѣкающаго TM въ точкѣ I , произведение $CN \times CF$ должно представлять площадь параллелограмма $CMIN$, а $\frac{1}{4}ab$ или $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ прямоугольникъ, составленный изъ двухъ полу-осей. И такъ параллелограммы, состоящія изъ тангенсовъ, проведенныхъ къ концамъ сопряженныхъ діаметровъ, равны между собою и прямоугольнику, начерченному по осемъ полуосямъ.

250. Изъ подобія tmx же треугольниковъ TPM и CNR выходящъ $PT:PM = (R:RN)$; слѣд. $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, или $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2} = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz) \frac{bb}{az} (\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa}$; въ прямоугольныхъ треугольникахъ CNR и CPM получу $(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$ и $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$; слѣд. $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$; вставивъ въ первой части сего уравненія вмѣсто линей Алгебраическія ихъ величины, буду имѣть по приведенію $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$. И такъ сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсиса равна суммѣ квадратовъ двухъ полуосей.

251. Если въ уравненіи $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$ вставлены будутъ вмѣсто CR и RN величины ихъ, то произойдетъ $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; а какъ нашли мы выше, что $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$, то слѣдуетъ изъ того, что $(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$. Въ подобныхъ треугольникахъ TPM , $MP'G'$ выво-

жу пропорцію, составивъ изъ каждого ея члена квадраты, $(PT)^2 : (TM)^2 = (P'M)^2 : (MT')^2$, или $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} = zz : (MT')^2$; слѣд. $(MT')^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}$; слѣд. $(TM)^2 \times (MT')^2 = (CN)^4$, или $TM \times MT' = (CN)^2$. Напослѣдокъ предсавивъ параметръ діаметра MM' чрезъ p' получу $2CM : 2CN = 2CN : p' (244)$, и слѣд. $2p' \times CM = 4(CN)^2$, или $(CN)^2 = \frac{1}{2} p' \times CM$; и такъ $TM \times MT' = \frac{1}{2} p' \times CM$, и слѣд. $CM : TM = MT : \frac{1}{2} p'$.

Еслии на TT' , какъ на діаметръ (фиг. 31), начертишь полкруга, то окружность его должна пройти чрезъ центръ C , потому что уголъ TCT' прямой; потомъ продолживъ полкруга, пока окружность его пересѣчется въ V , получишь по свойству круга (Геом. 120) $CM : TM = MT' : MV$; слѣд. $MV = \frac{1}{2} p'$.

252 И такъ по известнымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ MM' и NN' и углу, которой они составляютъ между собою, можно весьма удобно опредѣлить оси эллипса и начертить его слѣдующимъ образомъ.

Продолжи CM на количество MV , равное полупараметру его; изъ середины X линии CV поставь перпендикуляръ XZ , пересѣкающей въ Z неопредѣленную линію TT' , проведенную чрезъ точку M параллельно съ NN' . Изъ точки Z какъ изъ центра и радиусомъ равнымъ ZC опиши кругъ, который пересѣчетъ TT' въ двухъ точкахъ T и T' ; наконецъ въ

точкамъ симъ проведи изъ С линіи ТС и Т'С, ко-
торыя покажутъ направление ей. Для определеніи вели-
чинъ сихъ осей опусти перпендикуляры МР и МР', и
сдѣлай СА равную средней пропорціи между
СТ и СР, а СD равную средней пропорціи между
СТ' и СР'; ибо видѣли мы выше (239), что $СР : СА = СА : СТ$; не трудно доказать также (по ред-
ствомъ подобнѣхъ треугольниковъ ТММ' и ТСТ' и
извѣстныхъ величинъ ТР, РМ и СТ), что $СТ' = (CD')^2$
 $\frac{СР'}{СТ'}$, то есть, $СР' : CD = CD : СТ'$.

О Г и п е р б о л ѣ.

253. Разсмотримъ теперь такую кри-
вую линію (фиг. 32), которой каждая
точка М имѣетъ слѣдующее свойство: раз-
ность Мf — MF разстояній ея Мf и MF
отъ двухъ постоянныхъ точекъ f и F дол-
жна быть вездѣ одинакова и равна данной
линей а.

Мы намѣрены сыскать, такъ какъ вы-
ше при размалприваніи эллипсиса, такое
уравненіе, которое бы показало отношеніе
между перпендикулярами РМ, проведенными
на линію Ff и ихъ разстояніями Fр или
АР отъ какой нибудь постоянной точки F
или А, взятой произвольно на линіи fF.

Для достиженія сей цѣли беру за нача-
ло абсциссъ точку А, которую опредѣляю
сдѣлавши изъ середины С разстоянія Ff ли-
нью СА = $\frac{1}{2}a$; потомъ кладу СВ = СА.
По совершеніи сего представляю АР чрезъ x,

$(4ac + 4c^2)(ax + xx)$; наконец . . .

$$yy = \frac{4ac + 4c^2}{aa} (ax + xx).$$

254. Это уравненіе представляеѣтъ способъ чер-
тити кривую линейю такого рода по точкамъ; для
опредѣленія же сихъ точекъ должно полагать попере-
мѣнно разныя многія величины количеству x .

Можно начертить гиперболу еще и такъ: воз-
ми произвольно точку B больше BF , и изъ точки f
какъ изъ центра радіусомъ Bf засѣки дугу, кошо-
рую пересѣки въ точкѣ M другою дугою, описанною
изъ F радіусомъ Ar ; точка M будетъ принадлежать
гиперболѣ.

Наконецъ можно описать сѣю кривую линейю чрезъ
непрерывное движеніе слѣдующимъ образомъ.

Утверди въ точкѣ f линейку неопредѣленной
величины такъ, чтобъ она могла свободно обрѣщать-
ся около той точки. Къ точкѣ F и къ концу Q ли-
нейки привяжи нитку или шнурокъ FMQ такой ве-
личины, чтобъ разность его съ fQ была равна AB ;
потомъ посредникомъ спира M , приложивъ точку MQ
шнурка къ линейкѣ и не опуская, его вгдѣ, по-
двигай спирь M къ A ; въ продолженіи сего дви-
женія линейка должна постепенно опускаться или
склоняться къ fF , часть FM уменьшаться, а спирь M
описать желаемую кривую линейю AM , которая назы-
вается *Гиперболою*. Въ самомъ дѣлѣ не трудно примѣ-
нить, что дѣлая fQ или $fM + MQ$ равно какъ и fM
 $+ MQ$ остающіяся вездѣ одинакой величины; слѣд. и
разность ихъ $fM + MQ - FM - MQ$ или $fM - FM$
должна быть вездѣ одинакова.

255. Выводя изъ уравненія $yy = \frac{4ac + 4c^2}{aa}$

$(ax + xx)$ двойную величину $y = \pm$

$$\sqrt{\left[\frac{4ac + 4c^2}{aa} (ax + xx) \right]}, \text{ должно заклю-}$$

чимъ, что для одной и той же абсциссы AP или x находящаяся двѣ равныя ордовашы PM , PM' упадающія съ противныхъ сторонъ на продолженіе линіи AB , которая называется *первою осью*; изъ сего явствуетъ, что кривая линія имѣетъ у себя и другую ось, а именно AM' совершенно равную первой; сии оси просираваются въ безконечность, потому что по мѣрѣ того, какъ увеличивается x , увеличиваются также и обѣ величины $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx) \right]}$.

256. Если въ этомъ количествѣ сдѣлать x отрицательнымъ, то есть, если предположить точку P выше A , то оно превратится въ $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (x^2 - ax) \right]}$; и пока x въ отрицательномъ изображеніи $xx - ax$, или $x(x - a)$ будетъ меньше a , то количество $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4cc}{aa} (xx - ax) \right]}$ останется до тѣхъ поръ умственнымъ, и сдѣл. у не можетъ имѣть настоящей величины отъ A до B ; но какъ скоро x будетъ превосходить a , то $xx - ax$ сдѣлается тотчасъ положительнымъ, и у получаетъ опять настоящія величины. Изъ сего слѣдуетъ заключить, что отъ точки B просиравается новая кривая линія mBm' , которая на подобіе первой просиравается безко-

нечно въ обѣ стороны продолженія АВ, и которая совершенно равна той, потому что когда сдѣлаешь $Bp = AP$, то $xx - ax$ или $Ap \times pB$ превратится въ $AP \times PB$; а изъ сего должно заключить, что $pt = PM$.

257. Если въ уравненіи $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}$ ($ax + xx$) сдѣлано будетъ $y = 0$, то произойдетъ $ax + xx$ или $x \cdot (a + x) = 0$, также $x = 0$ и $x + a = 0$, или $x = -a$. Изъ сего заключить должно, что кривая линия касается оси АВ въ двухъ точкахъ А и В.

258. Если предположишь $AP = AF$, то есть, $x = c$, то за величину ординаты Fm'' , проходящей чрезъ точку F (которая равно какъ и точка f называются *фокусами*), получишь $y = \pm \sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa} (ac + cc)}$ $= \pm \sqrt{\frac{4(ac + cc)^2}{aa}} = \pm \frac{2(ac + cc)}{a}$; слѣд. двойная ордината $m'' m''' = \frac{4(ac + cc)}{a}$, она же называется *параметромъ* гиперболы. И такъ представивъ сію линию чрезъ p , получишь $p = \frac{4(ac + cc)}{a}$, и слѣд. $\frac{p}{a} = \frac{4(ac + cc)}{aa}$. Если вставишь $\frac{p}{a}$ въ прежде найденномъ уравненіи сей кривой

линии, то оно переименится въ другое гораздо простѣйшее $уу = \frac{p}{a} (ax + xx)$.

По величинѣ p можно заключить, что параметръ первой оси гиперболы больше четвереннаго разстоянія отъ верху A къ фокусу F ; ибо сія величина $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, превращаясь въ $p = 4c + \frac{4cc}{a}$ очевидно больше $4c$.

259. Перпендикуляръ DD' , проходящій чрезъ середину C линии AB , котораго половина CD представляетъ среднюю пропорціональную между c и $a + c$, то есть, между AF и fA , называется второю осью Гиперболы; представивъ ее чрезъ b , получимъ $\frac{bb}{4} = c \cdot (a + c)$, или $bb = 4ac + 4cc$, и слѣд. по вставкѣ величины сей bb въ уравненіи $уу = \frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx)$, уравненіе переименится въ $уу = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$. Не трудно примѣнить здѣсь, что выведенныя нами три уравненія для гиперболы разнятся отъ трехъ уравненій эллипсиса одними только знаками квадрата cc и квадрата xx .

Изъ эквации $уу = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$ можно вывести также сходное свойство съ замѣченными нами въ эллипсѣ; ибо по умноженіи въ ней знаменателя aa , произойдетъ $аауу = bb (ax + xx)$, и слѣд. получимъ такую пропорцію $уу : ax + xx = bb : aa$, или $(PM)^2 : AP \times PB = (DD')^2 : (AB)^2$ или $= (CD)^2 : (AC)^2$; то есть, квадратъ ординаты къ первой оси гиперболы содержится къ произведенію $AP \times PB$ двухъ абсциссъ такъ, какъ квадратъ второй оси къ квадрату первой; и слѣд. квадраты ординатъ содержатся между собою, какъ произведенія сходственныхъ абсциссъ.

Еслили оси a и b равны между собою, то эквация превращается въ $уу = ax + xx$, и кромѣ знака въ квадратѣ xx ничемъ не разнится отъ уравненія круга. Гипербола называется въ такомъ случаѣ *равнобедренной*.

Изъ уравненія $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$ происходитъ $4ac + 4cc = ap$; но поелику найдено также, что $4ac + 4cc = bb$, то слѣдуетъ заключить, что $ap = bb$. Изъ уравненія сего выходитъ $a : b = b : p$, и слѣд. па-

раметръ первой оси служимъ третьимъ пропорциональнымъ членомъ къ первой и второй оси.

260. Если изъ точки D проведена будетъ къ A прямая линия DA, то въ прямоугольномъ треугольникѣ DCA получимъ $DA = \sqrt{[(CD)^2 + (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$, или вставивъ въ мѣсто bb величину его $4ac + 4cc$, будемъ имѣть $DA = \sqrt{cc + ac + \frac{1}{4}aa} = c + \frac{1}{2}a = AF + CA = CF$.

И такъ для опредѣленія фокусовъ по известнымъ осямъ, должно перенести изъ C къ F разстояние DA; а чинимъ сысканъ вторую ось по даннымъ фокусамъ и первой оси, то должно прочертить изъ точки A, какъ изъ центра, радиусомъ CF дугу, пересекающую перпендикуляръ DD' въ какой нибудь точкѣ D.

261. Изъ сего явствуетъ, что для чертежа гиперболы надъбно знать всегда два количества, именно большую и меньшую ось, или большую ось и фокусы, или большую ось и параметръ. На примѣръ если даны будутъ большая ось и параметръ, то сыскавши среднюю пропорціональную между сими двумя линиями, опредѣли вторую ось, посредствомъ конюръ безъ всякаго труда найши можешь фокусы и проч.

262. Если возмемъ на Mf часть $MG = MF$, и по проведеніи FG продолжимъ изъ точки M перпендикуляръ MOT, то сей перпендикуляръ будетъ тангенсомъ гиперболы.

Для доказательства проведемъ къ фокусамъ изъ какой нибудь другой точки N , взятой на TM , прямые линии Nf и NF , а къ точкѣ G прямую NG ; явствуемъ по самой конструпціи, что NF и NG равны между собою; а какъ Nf меньше $NG + Gf$, и слѣд. меньше $NF + Gf$, то и разность $Nf - NF$ должна быть меньше Gf , то есть, $Mf - MF$; слѣд. точка N находится въ гиперболѣ. Такое же доказательство случитъ для всякой другой точки, взятой на TM кромѣ M .

Углы FMO и OMG равны по той же конструпціи; но уголъ OMG равенъ также противоположенному себѣ NMQ ; почему $FMO = NMQ$, и слѣд. линия MF , простирающаяся къ фокусу F , составляетъ съ тангенсомъ такой же уголъ, какой дѣлаемъ съ нимъ продолженіе MQ линіи fM , которая имѣетъ направленіе къ другому фокусу.

И такъ если F будетъ представлять точку содержащую свѣтъ, то лучи, вышедшіе изъ нее, должны упасть по выгибу MAM' и опризиться такъ, какъ бы они произошли изъ точки f .

263. Опредѣлимъ теперь суб-тангенсъ PT . Поскольку тангенсъ MT раздѣляетъ уголъ fMf на двѣ равныя части, то (Геом. 104) можно вывести такую пропорцію $fM : MF$

$\equiv fT : FT$; но $fM = z + a$ (предсавивъ MF чрезъ z , какъ было показано выше), сверхъ того Ff или $Bf + AB + AF = a + 2c$, а линия fT или $fF - FT = a + 2c - FT$; и такъ поставивъ вмѣсто линий Алгебраическія ихъ величины, получимъ $z + a : z = a + 2c - FT : FT$; по умноженіи крайнихъ и среднихъ членовъ $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$, откуда по совершении обыкновенныхъ дѣйствій выведено будетъ $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$;

поелику же нашли мы (253) $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$,

$$\text{слѣд. } 2z + a = \frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} = \dots$$

$$\frac{(2c + a)2x + (2c + a)a}{a} = \frac{(2c + a)(2x + a)}{a};$$

по вставкѣ сихъ величинъ въ уравненіи FT ,

$$\text{произойдетъ } FT = \frac{(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \times \frac{2x + a}{a}}, \text{ или}$$

$$\text{по уничтоженіи общаго фактора } \frac{2c + a}{a} \text{ бу-}$$

$$\text{детъ имѣть } FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}.$$

По опредѣленіи FT не трудно опредѣлимъ субтангенсъ PT , потому что $PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x = \dots$

$$\frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \dots$$

Часть III.

Ф

$\frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; слѣд. $PT = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$. И такъ должно заключить, что изображеніе гиперболическаго субтангенса разнится одними знаками отъ найденнаго для эллипсиса.

264. Если изъ PT вычтемъ AP , то въ остаткѣ получишь AT расстояние верха отъ точки, гдѣ ось пересѣкается тангенсомъ. Расстояние сіе изображено будетъ чрезъ $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$, а по приведеніи
 $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

265. По изображенію AT можно сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія на кривизну гиперболы. Хотя видѣли мы выше, что каждая оспрасль AM , AM' простирается безпредѣльно; однакожъ кривизна ихъ такого рода, что всѣ тангенсы, проведенные къ каждой точкѣ сихъ безконечныхъ оспраслей, пересѣкаютъ ось не далѣе, какъ на разстояніи отъ A до C . Въ истинѣ сего можно увѣриться слѣдующимъ образомъ. Хотя бы въ величинѣ AT вставлены были за x всѣ удобовообразимыя количества, начиная отъ 0 до безконечности, однакожъ AT не возрастетъ отъ 0 далѣе, какъ до $\frac{1}{2}a$; ибо по предположеніи x безконечнымъ количествомъ, должно знаменателя $\frac{1}{2}a + x$ почи-

пашь за одно сѣ x ; въ силу сего AT пре-
 вращается въ $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, то есть въ $\frac{1}{2}a$. И такъ
 тангенсѣ, проведенный къ безпредѣльному
 концу каждой оспраси AM , AM' долженъ
 пройти чрезъ центрѣ. А какъ противопо-
 ложенныя оспраси Bm , Bm' совершенно рав-
 ны AM , AM' , и при томѣ точки A и B
 равно удалены отъ C , то слѣдуетъ также
 заключить, что лини сии будутъ служить
 также тангенсами къ безпредѣльнымъ кон-
 цамъ оспрасей Bm , Bm' . Тангенсы такого
 рода представлены (фиг. 33) чрезъ лини
 CX , CY .

266. Сии тангенсы называются *Асимп-*
тотами гиперболы; это такія лини, ко-
 торыя выходящѣ изъ центра, приближаютъ
 ся непрестанно къ гиперболѣ, и соединяютъ
 сѣ нею на безконечномъ разстояніи.

Естли чрезъ верхъ A (фиг. 32) про-
 ведена будетъ прямая линя At параллель-
 ная сѣ PM , то по причинѣ подобія пре-
 угольниковъ TAt , TRM получимъ $TR:PM =$
 $AT:At$; то есть, $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$;
 $At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a + x} \times \frac{\frac{1}{2}a + x}{ax + xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x}$, или вспа-
 вивъ за y величину его $\frac{b}{a} \sqrt{(ax + xx)}$,
 ф 2

$$At = \frac{\frac{1}{2}b \sqrt{ax + xx}}{a + x}; \text{ величина } \frac{\frac{1}{2}b \sqrt{ax + xx}}{a + x}$$

превращается въ $\frac{1}{2}b$, или CD, какъ скоро x принято будетъ за безконечное количество, потому что количество ax должно уничтожиться въ разсужденіи ax , а a въ разсужденіи x . Почему для опредѣленія асимптотъ должно сдѣлать слѣдующую конструцію: поставь въ точкѣ А перпендикуляръ AL (фиг. 33), и продолжи его въ обѣ стороны на количество равное CD; потомъ проводи чрезъ центръ С и концы L и L' двѣ прямыя линіи, которыя будутъ желаемыя асимптоты.

267. Для полученія изображенія СТ (фиг. 32) должно вычесть АТ изъ СА; почему $СТ = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{(CA)^2}{CP}$; а изъ этого уравненія выходитъ слѣдующая пропорція $CP : CA = CA : CT$.

268. Изображеніе ТМ выходитъ изъ прямоугольнаго треугольника ТРМ, въ которомъ $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa}$
 $(ax + xx) + \frac{(ax + xx)^2}{(\frac{1}{2}a + x)^2} = [\frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x)^2 + ax + xx] \frac{(ax + xx)^2}{(\frac{1}{2}a + x)^2}$

269. Что принадлежитъ до изображенія РІ или субнормали, то можно вывести

его посредствомъ подобныхъ треугольниковъ ТРМ, МРІ (подобныхъ по тому, что изъ прямого угла ТМІ опущенъ перпендикуляръ РМ), въ которыхъ $ТР : РМ = РМ : РІ$, или $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y = y : РІ = \frac{y^2 (\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx}$, или по причинѣ, что $y^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax + xx)$, $РІ = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x)$.

270. Начнемъ теперь искать уравненія посредствомъ второй оси DD'. Если проведемъ къ сей второй оси перпендикуляръ МР', то назвавъ МР', y' ; ДР', x' ; получимъ $СР' = МР = y = \frac{1}{2}b - x'$; $Р'М = СР = \frac{1}{2}a + x = y'$; и слѣд. $x = y' - \frac{1}{2}a$; почему вставивъ въ уравненіи $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$, или $aa yy = bb (ax + xx)$ за x и y найденныя теперь величины, будемъ имѣть по приведеніи $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$. Отсюда явствуетъ, что уравненіе гиперболы по второй оси не одинаково съ уравненіемъ эллипсиса, то есть, уравненія сіи не имѣютъ того сходства, какое мы видѣли въ выведенныхъ по первой оси.

271. Если станемъ искать уравненіе по первой оси АВ, принявъ за начало абсциссъ центръ С; то представивъ СР чрезъ z , по-

лучимъ $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$, и слѣд.
 $x = z - \frac{1}{2}a$; вставивъ величину сію въ
 эквации $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$, будемъ имѣть
 $yy = \frac{bb}{aa} (zz - \frac{1}{4}aa)$.

Естьли нужно будетъ сыскать уравне-
 ніе по второй оси DD' съ абсциссами тако-
 го же рода; то представивъ CP' чрезъ z' ,
 получимъ $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$, и
 слѣд. $x' = \frac{1}{2}b - z'$; вставивъ величины сіи
 въ уравненіи $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$,
 которое нашли (270) по второй оси, бу-
 демъ имѣть $y'y' = \frac{aa}{bb} (z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

272. Естьли нужда потребуетъ отне-
 сти изображенія PT , ST , PI и PM , найден-
 ные выше, къ центру C , то сиюмъ толь-
 ко вставитъ въ сихъ изображеніяхъ $z - \frac{1}{2}a$
 въ мѣсто x ; послѣ чего получимъ

$$PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}, ST = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}, PI = \frac{bbz}{aa}, (TM)^2 \\ = (\frac{bbz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa) \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}.$$

Естьли линия MT продолжена будетъ до
 пересѣченія ея со второю осью въ T' , то
 въ подобныхъ треугольникахъ TRM , TCT'
 получимъ слѣдующую пропорцію $TR : PM =$

$$\begin{aligned} \text{СТ} : \text{СТ}', \text{ или } \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y &= \frac{\frac{1}{2}aa}{z} : \text{СТ} = \\ \frac{\frac{1}{2}aay}{zz - \frac{1}{4}aa} ; \text{ а какъ } zz - \frac{1}{4}aa &= \frac{aayy}{bb}, \text{ то } \text{СТ}' \\ &= \frac{\frac{1}{2}ab}{y} = \frac{(\text{CD})^2}{\text{PM}} = \frac{(\text{CD})^2}{\text{CP}'} ; \text{ слѣд. } \text{CP}' : \text{CD} = \\ \text{CD} : \text{СТ}'. \end{aligned}$$

273. Всякая прямая линия МСМ' (фиг. 33), проходящая чрезъ центръ С гиперболы, и касающаяся съ двухъ противныхъ сторонъ окружности ея, называется *діаметромъ* или *поперешникомъ*. Всякая прямая МО, проведенная изъ какой нибудь точки *м* гиперболы параллельно съ тангенсомъ къ точкѣ М, и оканчивающаяся у продолженнаго діаметра ММ', называется *ордонатою* къ сему діаметру; МО и ОМ' абсциссами его. Мы докажемъ немедленно, что свойства ордонатъ МО въ разсужденіи діаметровъ, оканчивающихся при кривой линии, одинаковы съ свойствами ордонатъ МР къ первой оси.

Естьли изъ точекъ *м* и О проведены будутъ перпендикуляры *мр* и ОQ на ось АВ, и изъ точки *м* линия *мS* параллельная съ АР, то по представленіи РМ чрезъ *y*, СР чрезъ *z*, Qр чрезъ *g*, СQ чрезъ *k*, получимъ АР = СР — СА = $z - \frac{1}{2}a$; ВР = СР + ВС = $z + \frac{1}{2}a$; Ар = Ср — СА =

$$CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a; Bp = Cp \\ + BC = k - g + \frac{1}{2}a.$$

Подобные треугольники CPM, CQO да-
 ютъ CP : PM = CQ : QO, то есть, $z : y$
 $= k : QO = \frac{ky}{z}$. Подобные треугольники
 TPM, mSO даютъ PT : PM = mS или Qp :
 SO; то есть, (272) $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y = g : SO$
 $= \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; слѣд. $mp = SQ = QO - SO$
 $= \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$. Но какъ точка m при-
 надлежитъ гиперболѣ, то должно (259),
 чтобъ $(pm)^2 : (PM)^2 = Ap \times pB : AP \times$
 PB ; то есть, $(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa})^2 : yy = (k -$
 $g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a)$
 $(z + \frac{1}{2}a)$, или $\frac{kkyu}{zz} - \frac{2gkzyu}{z(zz - \frac{1}{4}aa)} + \dots$
 $\frac{ggzyu}{(zz - \frac{1}{4}aa)^2} : yy = kk - 2kg + gg - \frac{1}{4}aa :$
 $zz - \frac{1}{4}aa$; слѣд. умноживъ крайніе и сред-
 ніе члены, и обративъ при томъ вниманіе
 на количества, умноженные и раздѣленные
 какъ на $zz - \frac{1}{4}aa$, такъ и на z , получимъ
 $\frac{kkyu}{zz} (zz - \frac{1}{4}aa) - 2gkyu + \frac{ggzyu}{zz - \frac{1}{4}aa} =$
 $kkyu - 2gkyu + ggyu - \frac{1}{4}aayy$, или по
 раскрытіи члена $\frac{kkyu}{zz} (zz - \frac{1}{4}aa)$, по уни-
 чтоженіи $kkyu$ и $- 2gkyu$ и по раздѣленіи

на уу, будемъ имѣть — $\frac{1}{4} \frac{aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa}$
 $= gg - \frac{1}{4}aa$ такое уравненіе, которое слу-
 житъ къ доказательству трактующаго свой-
 ства; однако мы напередъ замѣтимъ здѣсь,
 что . . .

Если съ какой нибудь стороны цен-
 тра С взята будетъ на оси АВ часть СR,
 равная средней пропорціональной линіи ме-
 ду ВР и АР, то есть такая, которой $(CR)^2$
 $= AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$, и потомъ когда
 поставивъ на нее перпендикуляръ RN', пере-
 сѣкаемый въ N' линіею NN', которая про-
 ходитъ чрезъ центръ С параллельно съ ТМ,
 слѣдуетъ CN = CN', то произшедшая изъ
 того линія NN' называется *сопряженнымъ*
діаметромъ діаметра MM'; линія же, име-
 нуемая параметромъ діаметра MM', состо-
 итъ изъ третьей пропорціональной линіи къ
 MM' и NN'.

Возвратимся теперь къ своему предме-
 ту, и представимъ СМ чрезъ $\frac{1}{2}a'$, СN или
 CN' чрезъ $\frac{1}{2}b'$, СО чрезъ z' , и Ои чрезъ y' .
 Въ подобныхъ треугольникахъ СРМ, СQО
 получимъ СМ : СР = СО : СQ, то есть,
 $\frac{1}{2}a' : z = z' : k$; слѣд. $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$.

Треугольники mSO и $CN'R$, подобные по причинѣ параллельныхъ $б$ координатъ, даютъ $CN' : CR = mO : mS$, или $\frac{1}{2}b' : CR = y' : g$; почему $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b'}$, и слѣд. $gg = \frac{(CR)^2 \times y y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, или (поскольку сдѣлано $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$), $gg = \frac{y'y' (zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Если вставимъ въ мѣсто gg и kk найденныя теперь величины ихъ въ уравненіи $-\frac{\frac{1}{2}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, которое выведено выше, то получимъ $-\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz (zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b' (zz - \frac{1}{4}aa)} = \frac{y y' zz}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{1}{4}aa$, или (по приведеніи и раздѣленіи на $\frac{1}{4}aa$) $-\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = -\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - 1$, наконецъ по совершеніи надлежащихъ дѣйствій будемъ имѣть $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}$, $(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$ точно такое же уравненіе, какое вывели для первой оси.

274. Если сдѣлаемъ $y' = 0$, то получимъ $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = 0$, и слѣд. $z' = \pm \frac{1}{2}a'$. По сему уравненію должно заключить, что гипербола пересѣкаетъ линію MM' въ двухъ точкахъ M и M' , удаленныхъ отъ центра на количество равное $\frac{1}{2}a'$ или CM .

И такъ всѣ діаметры пересѣкаются въ центрѣ пополамъ.

275. Уравненіе $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, изъ котораго выводимъ $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$, то есть, двѣ величины y' съ противными знаками, показываетъ, что точка m , произходящая отъ продолженія mO равнаго Om' , будетъ принадлежать кривой линіи; и слѣдъ каждой діаметръ MM' раздѣляетъ на двѣ равныя части всѣ линіи, которыя проведены будутъ параллельно съ тангенсомъ, проходящимъ чрезъ начало его M .

276. Поелику изъ той же экваціи выходишь $a'a'y'y' = b'b' (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; то можно вывести слѣдующую пропорцію $y'y' : z'z' - \frac{1}{4}a'a' = b'b' : a'a'$, или $(mO)^2 : MO \times OM' = (NN')^2 : (MM')^2$, то есть, квадратъ всякой ординаты mO къ поперешнику, оканчивающемуся у кривой линіи, содержится къ произведенію $MO \times OM'$ двухъ абсциссъ, какъ квадратъ сопряженнаго діаметра къ квадрату того же перваго поперешника.

277. Если изъ центра C опущенъ будетъ перпендикуляръ CF на TM , то въ подоб-

ныхъ треугольникахъ CFT, TPM получимъ ТМ:
 $PM = CT : CF$, и слѣд. $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$, а въ дру-
 гихъ CRN' , TPM подобныхъ же $PT : TM =$
 $CR : CN'$ или CN , почему $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$;
 изъ сихъ уравненій вывожу $CF \times CN = \dots$
 $\frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, или по
 составленіи квадратовъ $(CF)^2 \times (CN)^2 =$
 $\frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; но какъ $(PM)^2 =$
 $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$, $(CR)^2 = zz -$
 $\frac{1}{4}aa$ (273), а $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{2}a^4}{zz}$ и $(PT)^2 =$
 $\frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$ (272), то по вставкѣ сихъ ве-
 личинъ и по приведеніи будемъ имѣть $(CF)^2$
 $\times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, или $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$.
 И такъ по продолженіи МТ до точки I асим-
 птоты, МІ должна быть равна CN, что мы
 увидимъ ниже, а CIMN будетъ такой па-
 раллелограмъ, коего площадь $= CF \times MI =$
 $CF \times CN$; слѣд. въ какомъ бы мѣстѣ точка
 М не находилась, параллелограмъ CIMN бу-
 детъ всегда равенъ въ площади прямоуголь-
 нику, составленному изъ двухъ полуосей;
 то есть, равенъ $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$, или $\frac{1}{4}ab$.

278. Въ подобныхъ треугольникахъ TPM
 и CRN' получимъ $TP : PM = CR : RN'$;

слѣд. $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, и $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2}$
 $= \frac{bbzz}{aa}$ по вставкѣ Алгебраическихъ величинъ
и по приведеніи; а какъ по свойству прямо-
угольныхъ треугольниковъ CPM и CRN' , $(CM)^2$
 $= (CP)^2 + (PM)^2$, и $(CN')^2$ или $(CN)^2$
 $= (CR)^2 + (RN')^2$; то слѣд. $(CM)^2 -$
 $(CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 -$
 $(RN')^2$; вставивъ во второй части сего ура-
венія въ мѣсто линей Алгебраическія ихъ
величины, найденныя прежде, будемъ имѣть
по совершеніи надлежащаго приведенія $(CM)^2$
 $- (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; то есть, *раз-*
ность квадратовъ всякихъ двухъ сопря-
женныхъ діаметровъ бываетъ всегда рав-
на разности квадратовъ обѣихъ полуосей.

Изъ сего должно заключить, что въ
равнобедренной гиперболѣ каждой діаметръ
равенъ своему сопряженному; ибо если
 $a = b$, то $(CM)^2 - (CN)^2 = 0$, и слѣд.
 $CM = CN$.

279. Если въ уравненіи $(CN)^2 =$
 $(CR)^2 + (RN')^2$ вставишь въ мѣсто CR и
 RN' Алгебраическія величины, то произой-
детъ $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$; а какъ
найдено (272), что $(TM)^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz \right)$

— $\frac{1}{4}aa$) $\frac{zz - \frac{1}{4}az}{zz}$, по $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times (CN)^2$. Въ подобныхъ треугольникахъ MPT и $MP'T'$ выходитъ, по составленіи квадратовъ изъ всѣхъ членовъ, такая пропорція $(PT)^2 : (TM)^2 = (P'M)^2 : (T'M)^2$, или $\frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz} : \frac{(CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4}aa)}{zz} = zz : (T'M)^2$;

почему $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$, а $(TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$, или $TM \times T'M = (CN)^2$.

Представивъ параметръ діаметра MM' чрезъ p' , получимъ $2CM : 2CN = 2CN : p'$, и слѣд. $2p' \times CM = 4(CN)^2$, или $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; почему $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, и слѣд. $CM : TM = T'M : \frac{1}{2}p'$.

280. И такъ для опредѣленія осей гиперболы, и слѣд. для начерченія сей кривой линіи по даннымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ и углу ихъ можно теперь изъ изъясненнаго вывести слѣдующій способъ.

Положи на MC (фиг. 34) линію $MN = \frac{1}{2}P'$, и изъ середины I линіи CH пославъ перпендикуляръ IK , пересѣкающій въ какой нибудь точкѣ K линію MT' , проведенную изъ точки M параллельно съ сопряженнымъ діаметромъ NN' . Изъ точки K , какъ изъ центра, и радиусомъ, равнымъ разстоянію оной K до C , опиши полукруга, пересѣкающій MT' въ точкахъ T и T' ; пономъ чрезъ точки сіи и центръ C проводи линіи TC и CT' , которыя покажутъ направленія осей. Ибо легко можно примѣнить 1е, что уголъ TCT' будетъ прямой, потому что окружность проходитъ чрезъ точку C и пересѣchnittкомъ имѣетъ TT' ; 2е, по свойству круга получимъ (Геом. 120) $CM : TM = T'M : MN$; а какъ приномъ MN слѣд. на $= \frac{1}{2}P'$, то будемъ имѣть также $CM : TM = T'M : \frac{1}{2}P'$.

Что касается до опредѣленія величинны осей, то стоитъ только опустить изъ точки М перпендикуляры MP , MP' , и сыскать SA среднюю пропорціональную между CP и CT , равную CD' средней пропорціональной между CP' и CT' . Въ справедливости сего удостовѣриться можно по самымъ изображеніямъ, найденнымъ (272) для ST и ST' .

Когда извѣстные два сопряженные діаметры равны, тогда параметръ бываетъ также съ ними равенъ, и для того MN сдѣлается $= MC$; двѣ точки сѣченія Н и С должны слиться, а MC превратится въ тангенсъ круга; и такъ, чтобы получить центръ К, стоитъ только поставить на CM перпендикуляръ въ точкѣ С.

О Гиперболѣ, рассматриваемой между ея Асимптотами.

281. Гипербола, рассматриваемая относительно къ своимъ асимптотамъ, имѣетъ нѣкоторыя полезныя свойства. Предлагая ихъ, припомнимъ здѣсь напередъ, какъ асимптоты опредѣляются (Смотри 266).

Мы намѣрены относить каждую точку Е Гиперболы (фиг. 35) къ двумъ асимптотамъ CLO , $CL'o$; и потому проводя изъ Е линію EQ параллельно къ какой нибудь асимптотѣ, будемъ искать, какое отношеніе имѣютъ между собою линіи EQ и CQ .

Для опредѣленія отношенія сего, проведемъ изъ точки Е параллельную линію OEO со второю осью DD' и $E'S$ параллельную съ

CLO, а изъ верху А линією AG параллельную съ CL'o. Потомъ положивъ $CA = \frac{1}{2}a$, CD или AL или AL' $= \frac{1}{2}b$; CP = z, PE = y, AG = m, GL = n, CQ = t, QE = u; въ подобныхъ треугольникахъ CPO, CAL получимъ $CA : AL = CP : PO$ или $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$, или $a : b = z : PO = PO = \frac{bz}{u}$; слѣд. $EO = \frac{bz}{a} - y$, а $Eo = \frac{bz}{u} + y$; почему $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$ (по вставкѣ величины $\frac{bb}{aa} (zz - \frac{1}{4}aa)$ равной yy и по приведеніи); то есть, $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$. Свойство сіе принадлежитъ всякой точкѣ гиперболы, потому что Е взята произвольно.

282. Изъ подобія треугольниковъ QEO, ESo и AGL выходишь $AL : AG = EO : EQ$ и $AL : GL = Eo : ES$; умножь обѣ сіи пропорціи по порядку, такъ чтобъ известная величина $EO \times Eo$ могла выйти въ новой, и ты получишь $(AL)^2 : AG \times GL = EO \times Eo : EQ \times ES$, то есть, $\frac{1}{4}bb : mn = \frac{1}{4}bb : ut$; слѣд. $ut = mn$ (по причинѣ равенства предвѣдущихъ членовъ пропорціи), представляетъ эквацію, принадлежащую гиперболѣ между ея асимптотами. И такъ во всякой точкѣ Е гиперболы $EQ \times ES$ или $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Если предположено будетъ, что точка E упадетъ въ A , то CQ обращается въ такомъ случаѣ въ CG , и QE въ AG ; почему $CG \times AG = AG \times GL$, и слѣд. $CG = GL$. А какъ точка G представляетъ по такому равенству середину CL , то должно заключить, что $CG = AG = GL$, потому что окружность описаннаго полукруга на CL , какъ на діаметрѣ и слѣд. радіусомъ CG , должна неминуемо пройти чрезъ точку A по причинѣ прямого угла A или CAL ; почему m будетъ $= n$, и $ut = m^2 = (CG)^2$.

Сей непрѣмняющійся квадратъ m^2 или $(CG)^2$, копорому произведение ut или $CQ \times QE$ всегда равно, называется *степеню гиперболы*.

283. Изъ доказаннаго свойства можно вывести слѣдующее другое: *прямая линия REr , проведенная всячески чрезъ какую нибудь точку E гиперболы къ обѣимъ асимптотамъ ея, дѣлаетъ равныя части RE , mr , заключающіяся между кривою и асимптотами.*

Ибо по проведеніи чрезъ точку m линіи bmH параллельной съ OEo , въ подобныхъ треугольникахъ REO и RmH получимъ $ER : Rm = EO : Hm$, а въ подобныхъ треугольникахъ rhm ,

Часть III. X

то $E, Er : mr = Eo : mb$; умноживъ члены сихъ пропорцій по порядку, выведемъ $ER \times Er : Rm \times rm = EO \times Eo : Em \times mb$; а какъ каждое изъ произведеній $EO \times Eo$ и $Em \times mb$ равно $(CD)^2$ (282), то слѣд. $ER \times Er = Rm \times mr$, или $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; наконецъ сдѣлавъ надлежащія умноженія и уничтоживъ въ обѣихъ частяхъ $ER \times mr$, будемъ имѣть $ER \times Em = Em \times mr$, слѣд. $ER = mr$.

284. Изъ сего должно заключить, что всякой тангенсъ Tt гиперболы, оканчивающійся при асимптотахъ, раздѣляется на двѣ равныя части въ точкѣ прикосновенія M .

285. Еслии чрезъ точку M проведешь IMi параллельную съ DD' , а чрезъ точку E линію REr параллельную съ тангенсомъ Tt , то въ подобныхъ треугольникахъ TMI съ REO и Mit съ Eor получишь двѣ слѣдующія пропорціи $TM : MI = RE : EO$, и Mt или $TM : Mi = Er : Eo$, умноживъ члены сихъ пропорцій по порядку, будешь имѣть $(TM)^2 : MI \times Mi = RE \times Er : EO \times Eo$; но каждое изъ произведеній $MI \times Mi$ и $EO \times Eo$ равно $(CD)^2$; слѣд. $(TM)^2 = RE \times Er$.

286. Діаметръ CMV , проведенный изъ центра C . раздѣляется линією Rr параллель-

ую сѣ Тt на двѣ равныя части, потому что
сей діаметръ проходитъ (284) чрезъ середину
М тангенса Тt; и такъ положивъ $CM = \frac{1}{2}a'$,
 $TM = \frac{1}{2}q$, $CV = z'$, ордонашу $VE = y'$,
будешь имѣть въ подобныхъ треугольникахъ
CMT, CVR, $CM : MT = CV : VR$, то есть,
 $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$ или $a' : q = z' : VR = Vr =$
 $\frac{qz'}{a'}$; слѣд. $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, и $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$;
а какъ $RE \times Er = (TM)^2 = \frac{1}{4}qq$, то
 $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; при томъ же (273)
 $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; слѣд. по встав-
кѣ сей величины, получишь $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} +$
 $\frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, или $(qq - b'b') \frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq -$
 $- b'b')$, или $(qq - b'b') \frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq -$
 $- b'b') = 0$, или $(qq - b'b') (\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}) = 0$;
по раздѣленіи на $\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}$, выходитъ урав-
неніе $qq - b'b' = 0$, а изъ сего $q = b'$; или
 $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, то есть, $MT = CN$; но CN
представляетъ сопряженной полупоперешникъ
діаметра CM; и слѣд. сдѣланное предложеніе
(277) теперь доказано. Почему MI (фиг.
33) = CN.

287. Слѣд. для всякой прямой линіи
KEr параллельной сѣ сопряженнымъ діаметра

ромб CN (фиг. 35) служитъ тоже уравне-
 ніе $RE \times Et = (CN)^2$.

288. Отсюда легко можно вывести способъ, какъ
 по известнымъ сопряженнымъ диаметрамъ CM, CN
 (фиг. 36) и углу ихъ чертить гиперболу, находя
 попеременно разныя ея точки. Въ самомъ дѣлѣ изъ
 сказаннаго (284 и 286) явствуетъ, что еслии про-
 долживъ изъ начала M полуокрестника CM линію
 MT параллельно съ CN, возьмешь съ обѣихъ сторонъ
 поч. и M, части MT, Mt равныя CN и потомъ чрезъ
 центръ C проведешь линіи (T и St, то линіи сіи
 представлятъ собою асимптоты. Изъ тогожъ, что
 доказано (283), явствуетъ, что еслии продолживъ
 произвольно чрезъ поч. M прямыя PMQ, RMQ, сдѣ-
 лаешь по извѣстному выше $PO = MQ$, PMQ, сдѣ-
 лаешь по извѣстному выше $PO = MQ$, то всѣ точ-
 ки O, найденныя такимъ образомъ, будутъ принад-
 лежать гиперболѣ. Средствомъ точекъ O можно
 опредѣлить множество другихъ, такихъ на при-
 мѣрѣ, какъ V, V и проч. проводя прямыя ROS, ROS
 и сдѣлавъ $SV = RO$.

289. Явствуетъ также изъ сего, какимъ обра-
 зомъ можно начертить такую гиперболу, которая
 бы прошла чрезъ данную точку, заключающуюся ме-
 жду извѣстными асимптотами.

290. Наконецъ еслии раздѣлишь уголъ, состо-
 ящій изъ асимптотъ, и его дополненіе по поламъ,
 то получишь въ раздѣляющихъ линіяхъ направленіе
 двухъ осей, коихъ величины опредѣлили по объявлен-
 ному (280), и слѣд. отсюда можно вывести другой
 способъ для ршенія вопроса, содержащагося въ томъ
 мѣстѣ.

О П а р а б о л ѣ.

291. Приступимъ наконецъ разсматри-
 вать свойства кривой линіи, которой каж-
 дая точка удалена отъ неподвижной F (фиг.

37) на разстояніе равное отъ прямой данной линии XZ ; то есть свойства такой кривой линии, въ которой бы, естли изъ каждой ея точки M проведены будутъ къ извѣстной XZ перпендикуляры MN , производило всегда $MF = MN$.

Проведи изъ точки F на XZ перпендикуляръ FV , и раздѣли его на двѣ равныя части въ A ; точка A будетъ принадлежать кривой линии такого рода, потому что $AV = AF$; сія точка называется *верхо́мъ*.

Для показанія свойствъ сей кривой линии, которая называется *параболою*, съищемъ такое уравненіе, которое бы представило отношеніе между перпендикулярами MP опущенными на FV и ихъ разстояніями AP отъ точки A . Положимъ AV или $AF = c$, $AP = x$, $PM = y$; слѣд. $VP = AV + AP = c + x = MN$; а какъ $MF = MN$, то произойдетъ также $MF = c + x$, при томъ $FP = AP - AF = x - c$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ FRM получимъ $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, то есть, $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; по переставкѣ членовъ и по приведеніи $yy = 4cx$. Таковъ уравненіе параболы, и вотъ чему оно насъ научаетъ.

1°. Изъ сего уравненія выходитъ $y = \pm \sqrt{4cx}$, слѣд. должно заключить, что для одной величины AP или x , находится двѣ равныя y или PM ; но какъ одна изъ послѣднихъ величинъ положительная, а другая отрицательная, то онѣ должны упасть съ прошивныхъ сторонъ неопредѣленной лини API , которая называется *осью*, то есть, величины сии будутъ состоять изъ PM и PM' ; слѣд. парабола имѣетъ двѣ отрасли или два бедра AM , AM' совершенно между собою равныя, простирающаяся безпредѣльно; ибо ясно можно видѣть, что чѣмъ x становится больше, тѣмъ количество $\sqrt{4cx}$ и слѣд. y увеличивается.

2°. Еслии x сдѣлаешь отрицательнымъ, то произойдетъ $y = \pm \sqrt{-4cx}$, то есть, количество умноженное; слѣд. кривая линия не можетъ простирацца выше почки A .

3°. Еслии для полученія ординаты, проходящей чрезъ точку F , которая называется *фокусомъ*, сдѣлаешь $x = c$, то получишь $y = \pm \sqrt{4cc} = \pm 2c$, то есть, $Fm'' = 2c$, и слѣд. $m''m''' = 4c$. Ся линия, проходящая чрезъ фокусъ, называется *параметромъ* параболической оси. И такъ *параметръ параболической оси* въ чет-

дере больше разстоянія AF отъ верху сфокус.

4^е. Почему названъ параметръ p , получимъ $4c = p$; и слѣд. параболическая эквация перемѣнится въ $yy = px$.

292. По найденному уравненію для параболы, можно начертить сію кривую линією точками въпервыхъ такъ: именно положивъ попеременно за x разныя многія величины, опредѣли по онымъ соотвѣстственные величины y .

293. Можно еще начертить ее точками слѣдующимъ образомъ: выбери произвольно точку A за верхъ параболы и проводи неопредѣленно линією TVI , копорая должна служить направлениемъ оси, и положи на сѣи AV , AF равныя $\frac{1}{4}p$, точка F будетъ предсавлять фокусъ; потомъ поставивъ къ оси множество неопредѣленной величины перпендикуляровъ MM' , за сѣи ихъ сѣбѣихъ сферъ изъ точки F , какъ центра и радиусомъ равнымъ разстоянію VP , дугами въ точкахъ M и M' ; точки сіи будутъ принадлежать параболѣ, потому что FM , копорую сдѣлали равною VP , будетъ равна MH по продолженіи прямой XVI перпендикулярно къ оси. Сія прямая линія XVI называется *правломъ*.

294. Наконецъ можно описать параболу чрезъ непрерывное движеніе посредствомъ наугольника VNH такимъ образомъ: привяжи однимъ концомъ нитку равной длины сѣ fH къ краю f какого нибудь бока наугольника, а другой конецъ ея прикрѣпи въ точкѣ F ; потомъ приложивъ посредствомъ сѣи чашѣ нитки къ боку наугольника fH , и придерживая ее вездѣ плотно, подвигай другой бокъ наугольника вдоль ZX ; сипишь M при семъ движеніи начертить параболу MA .

295. Изъ уравненія $yy = px$ замѣчаемъ, что во всякой точкѣ M квадратъ

ординаты MP равняется произведению сходственной абсциссы на параметръ.

По тому же уравненію заключаемъ, что квадраты $уу$ ординатъ содержатся между собою, какъ абсциссы $х$; то есть, $(PM)^2 : (pt)^2 = AP : Ap$; ибо $(PM)^2 = p \times AP$ и $(pt)^2 = p \times Ap$; и такъ $(PM)^2 : (pt)^2 = p \times AP : p \times Ap = AP : Ap$ по раздѣленіи послѣдняго содержанія на p .

Найденная (222) эквація для эллипсиса была такова $уу = \frac{4ac - 4cc}{aa} (ux - xx)$; естли большая его ось a предположна будетъ безконечною, то xx въ такомъ случаѣ должно уничтожиться, какъ количество неспособное уменьшить ax , по той же причинѣ $4cc$ должно уничтожено быть въ разсужденіи $4ac$, и слѣд. уравненіе превратится въ $уу = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4aics}{aa}$, то есть, въ такое уравненіе $уу = 4cx$, которое приличествуетъ параболѣ. Почему параболѣ есть такой эллипсисъ, коего большая ось безконечна.

296. Естли по соединеніи почекъ F и H прямою линеєю FH , проведешь къ ней изъ точки M перпендикуляръ $МОТ$, то перпендикуляръ сей будетъ служить тангенсомъ параболѣ.

Для доказательства продолжи изъ какой нибудь другой точки N сего тангенса NF , NH и линеєю NZ перпендикулярную къ XZ . Естли почка N иная, а не M должна

лежать также на кривой линее, то должно въ такомъ случаѣ, чтобъ $NF = NZ$; но NZ меньше линее NH , которая по конструкціи равна NF .

297. Уголъ FMO по той же конструкціи равенъ OMN , а сей равенъ противоположенному себѣ $\angle FMN$; слѣд. FMO равенъ также $\angle FMN$.

И такъ лучи свѣта вышедши изъ точки F и упавъ по изгибу MAM' , должны опразинься всѣ параллельно съ осью; и обратно лучи, ударяющіе на излучину MAM' параллельно съ осью, должны собраться въ фокусъ F .

298. Прелику MN параллельна съ VP , то треугольники $НОМ$, $ТОF$ подобны, и при томъ они равны, пошому что $НО = OF$; отсюда явствуетъ, что $FT = MN = PV = x + c$, и слѣд. $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; то есть, субтангенсъ PT параболы вдвое больше абсциссы AP .

299. Если изъ точки M проведешь къ тангенсу TM перпендикуляръ MI , то въ подобныхъ треугольникахъ TRM , PMI получишь $TR : RM = RM : PI$, то есть, $2x : y = y : PI = \frac{yy}{2x}$, или (по причинѣ, что $y^2 = px$), $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. И такъ субнормаль параболы остается въ каждой

точка одинакова и равна полу-параметру.

300. Отсюда явствуетъ, что по известнымъ абсциссѣ и ордонатѣ, опишется къ какой нибудь точкѣ M параболы не трудно описатьъ параметръ ея слѣдующимъ образомъ. Положи $PT = 2AP$, и проводи изъ точки T линію TM , которая (268) предскавивъ тангенсѣ; поспавъ изъ точки M къ сему тангенсу перпендикуляръ MI , которой опредѣлитъ (299) на продолженной AP часть PI равную полу-параметру.

301. Всякая линія MX (фиг. 38), проведенная изъ точки M параболы параллельно съ осью AQ , называется *діаметромъ*; у каждого діаметра находится свой параметръ, которой состоитъ изъ учетвереннаго разстоянія MF отъ начала того же поперещника къ фокусу. Всякая прямая линія MO , продолженная изъ точки m параболы параллельно съ тангенсомъ TM , которой проходитъ чрезъ начало или верхъ M діаметра, называется *ордонатою* къ сему діаметру. Мы покажемъ теперь, что ордонаты, проведенныя къ какому нибудь поперешнику, имѣютъ одинакія свойства съ ордонатами къ оси.

Проведемъ ордонату MP къ оси, и изъ точекъ m и O параллельныя съ нею mp , OQ , на послѣдокъ изъ точки m продолжимъ ms параллельную съ осью. Положимъ $AP = x$, PM

$= y$, $Qp = g$, $AQ = k$, и слѣд. $Ap = k - g$. въ подобныхъ треугольникахъ TPM , mSO получимъ $TP : PM = mS : SO$, то есть,
 $2x : y = g : SO = \frac{gy}{2x}$; слѣд. $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; а какъ точка m принадлежитъ параболѣ, то должно (295), чтобъ $(pm)^2 : (PM)^2 = Ap : AP$, то есть, $(y - \frac{gy}{2x})^2 : yy = k - g : x$, или $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy = k - g : x$; слѣд. по умноженіи крайнихъ и среднихъ членовъ будемъ имѣть такое уравненіе $xуу - gуу + \frac{ggуу}{4x} = куу - gуу$, которое превратится (по раздѣленіи и уничтоженіи одинакихъ членовъ въ обѣихъ его частяхъ) въ $x + \frac{gg}{4x} = k$, или въ $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Представимъ теперь абсциссу MO чрезъ x' , а ординату mO чрезъ y' ; отъ чего произойдетъ $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; слѣд. $x' = k - x$, и $\frac{gg}{4x} = x'$ или $gg = 4xx'$. Но въ прямоугольномъ треугольникѣ mSO , $(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$, то есть, $gg + \frac{ggуу}{4xx} = y'y'$; слѣд. вставивъ вместо gg величину его $4xx'$, а вместо $уу$ величину px , будемъ имѣть по совершеніи надлежащаго

приведенія $4xx' + px' = y'y'$, или $(4x + p)x' = y'y'$. Еслили наконецъ предсавимъ чрезъ p' параметръ діаметра MX , то получимъ $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$, и напоследокъ $p'x' = y'y'$. Отсюда явствуетъ, что діаметральное уравненіе ничемъ не разнится отъ того, какое вывели мы выше для оси. И такъ *квадратъ ординаты тѣо ко всякому поперешнику параболы равенъ произведенію абсциссы на параметръ того же діаметра*; и квадраты ординатъ ко всякому параболическому діаметру содѣржатся между собою, какъ сходственныхъ абсциссы.

302. Еслили пожелаешь описать параболу, имѣющую поперешникомъ линію MX не предѣленной величины, а параметромъ ея данную линію p' , припомъ такія ординаты, которыя съ извѣстнымъ поперешникомъ составляютъ извѣстный уголъ; то поступая по вышеизъясненному, проводи чрезъ начало M линію MT , составляющую съ MX уголъ NMX равный данному углу. Изъ той же точки M продолжи линію MF , которая бы съ MT дѣлала также уголъ MTF равный NMX ; тогда $MF = \frac{1}{4}p'$, точка F будетъ въ томъ случаѣ (297 и 301) параболической фокусъ; проводи чрезъ F неопредѣленной величины линію TQ параллельно съ MX и пересѣкающую MT въ T : сія линія покажетъ направленіе оси, которой верхъ A опредѣли, опустивъ на нее перпендикуляръ MP и раздѣливъ PT по поламъ въ точкѣ A (298). После чего по извѣстному фокусу и верху параболы начерпни ее (293 и 294).

303. Три кривыя линіи, которыя разсматривали мы попеременно, названы количе-

скими сѣченіями пошому, что мы ихъ въ самомъ дѣлѣ получаемъ разсѣкая конусъ плоскостію нѣкоторыми извѣстными образами. На примѣрѣ эллипсисъ AMH (фиг. 39) происходитъ отъ разсѣченія конуса CH такою плоскостію, которая прорѣзываетъ бока его CH , CI накомъ ниже верха C ; надлежитъ исключить отсюда одинъ только случай, когда сія плоскость дѣлаетъ сѣ бокомъ CI такой же уголъ, какой составляетъ другой бокъ CH съ основаніемъ HI ; въ семъ случаѣ сѣченіе представляетъ кругъ.

Когдажъ напротивъ разсѣкающая плоскость проходитъ чрезъ одинъ бокъ CI конуса, и встрѣчается съ другимъ CH на продолженіи выше верха C , тогда изъ такого сѣченія выходитъ гипербола AMH (фиг. 40).

Наконецъ получаемъ параболу, разсѣкая конусъ такою плоскостію, которая параллельна съ какимъ нибудь бокомъ его CH (фиг. 41). Вотъ тому доказательство.

Вообразимъ конусъ CH (фиг. 39 и 40) разсѣченнымъ такою плоскостію, которая проходитъ по прямой линіи, соединяющей верхъ его C съ центромъ круга основанія, то есть, такою плоскостію, которая проходитъ по оси конуса; такое сѣченіе про-

изведетъ треугольникъ. Разрѣжемъ теперь
топъ же конусъ тремя новыми плоскостями
 AMm , FMG , $НmI$, изъ которыхъ бы каж-
дая была перпендикулярна къ треугольнику,
а двѣ послѣднія и параллельны съ основа-
ніемъ конуса. Два сѣченія FMG , $НmI$ про-
изведутъ (*Геом.* 199) круги, которые по-
встрѣчаются съ сѣченіемъ AMm въ M и m .
Пересѣченія FG , HI круговыхъ плоскостей
съ треугольникомъ по оси, будутъ діамет-
ры тѣхъ же круговъ. Сѣченія PM , pm кру-
говъ съ плоскостью AMm будутъ (*Геом.*
190) изображать какъ перпендикуляры къ
плоскости треугольника по оси, такъ рав-
но и ординаты круговъ и сѣченія AMm .

По предположеніи сего въ подобныхъ тре-
угольникахъ APG съ ArI и BFP съ BHr по-
лучимъ слѣдующія двѣ пропорціи $AP : Ar =$
 $PG : rI$ и $BP : rB = FP : Hr$; умноживъ
члены обѣихъ сихъ пропорцій по порядку
выведемъ $AP \times BP : Ar \times rB = PG \times FP :$
 $rI \times Hr$; а какъ по свойству круга $FP \times$
 $PG = (PM)^2$ и $Hr \times rI = (rm)^2$, то слѣд.
 $AP \times BP : Ar \times rB = (PM)^2 : (rm)^2$. Изъ сего
явствуетъ, что квадраты ординатъ сѣченія
 AMm содержатся между собою, какъ произ-
веденія абсциссъ; поелику же абсциссы сіи
находятся въ *фигурѣ* 39 съ разныхъ сто-

рош ордонаты, а въ *фиг. 40* падають онѣ съ одной стороны, то слѣдуетъ заключить, что *АМт* (*фиг. 39*) представляетъ эллипсисъ, а (*фиг. 40*) гиперболу.

Что касается до *фигуры 41*, то по допущеніи въ ней тѣхъ же вещей, какія употреблены были въ двухъ прежнихъ, получимъ по свойству круга $(PM)^2 = FP \times PG$ и $(pm)^2 = Hp \times pI$, или (по причинѣ параллельныхъ Gr съ FN и FP съ Hp , между которыми $FP = Hp$) $(pm)^2 = FP \times pI$; слѣд. $(PM)^2 : (pm)^2 = FP \times PG : FP \times pI = PG : pI = AP : Ap$ по причинѣ подобныхъ треугольниковъ APG , ApI ; и такъ усматривая въ сей пропорціи, что квадраты ордонатъ содержатся между собою, какъ абсциссы, заключаемъ о кривой линіи *АМт*, что она парабола.

Разсужденія объ Уравненіяхъ Коническихъ сѣченій.

304. Слѣдуетъ изъ доказаннаго (245), что по представленіи въ эллипсисѣ абсциссы *СО* (*фиг. 30*), взятой отъ центра на поперешникѣ *ММ'* чрезъ *х*, а ордонаты *тО* параллельной съ сопряженнымъ діаметромъ *СН* чрезъ *у*, можно вывести для сего поперешника, какой бы впрочемъ ни заключался

уголъ между обоими ими, слѣдующее уравненіе $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4} aa - xx)$. Еслии чрезъ точку m проведешь mo параллельно съ MM' , которая будетъ служить въ такомъ случаѣ ординашою діаметру NN' , то положивъ $CO' = x'$, а $mo' = y'$, получимъ $y = x'$, а $x = y'$, и слѣд. предыдущая эквація превратится въ $x'x' = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4} aa - y'y')$; отсюда выходитъ $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{4} bb - x'x')$. То есть, уравненіе для діаметра сохраняетъ всегда одинакой видъ, пока абсциссы будутъ принимаемы отъ центра, а ординаты параллельны съ сопряженнымъ діаметромъ.

Когда количество b случится равно a , тогда уравненіе превращается въ $yy = \frac{1}{4} aa - xx$, которое, какъ мы видѣли (221), относится къ кругу. Однако должно примѣчать, что въ такомъ уравненіи ординаты предполагаются перпендикулярными къ діаметру; еслии же онъ сдѣлаютъ какой нибудь другой уголъ не прямой, то та же эквація $yy = \frac{1}{4} aa - xx$ будетъ принадлежать эллипсису, въ которомъ сопряженные діаметры равны.

Еслии въ гиперболѣ назовемъ x абсциссу CO (фиг. 33), взятую отъ центра ді-

метра MM' , оканчивающагося при кривой
линеѣ, а у ординату mO параллельную съ
сопряженнымъ діаметромъ NN' , по какой бы
не былъ уголъ между сопряженными діаме-
трами, получимъ (273) для поперешника

$$MM' \text{ такое уравненіе } yu = \frac{bb}{aa} (xx - \frac{1}{4}aa).$$

Когда же по проведеніи чрезъ точку m' ли-
неи $m'O'$ параллельной съ діаметромъ CM ,
представимъ чрезъ y' линию $m'O'$, которая
въ такомъ случаѣ будетъ служить ордина-
тою діаметру NN' , а чрезъ x' абсциссу CO' ,
то произойдетъ $x' = y$, а $y' = x$; и слѣд.

$$\text{прежнее уравненіе переѣмнится въ } x'x' = \frac{bb}{aa}.$$

$$(y'y' - \frac{1}{4}aa), \text{ изъ котораго выходитъ } y'y' = \frac{aa}{bb} (x'x' + \frac{1}{4}bb).$$

Отсюда явствуетъ, что
эквація, относящаяся къ сопряженному діа-
метру NN' не такова уже, какую нашли
мы для діаметра MM' , оканчивающагося при
кривой линіѣ.

Что принадлежитъ до параболы, то мы
видѣли (301), что по принятіи абсциссъ
на какомъ нибудь діаметрѣ отъ начала его,
и по допущеніи ординатъ параллельными съ
тангенсомъ, проведеннымъ къ верху того же
діаметра, эквація выходитъ всегда такая
 $yu = px$, въ которой y представляетъ

ордонату, x абсциссу, а p параметръ діаметра.

Наконецъ естьли по принятіи абсциссъ въ гиперболѣ, разсматриваемой относительно къ асимпшотамъ ея, отъ центра одной изъ сихъ асимпшотъ, и по допущеніи ордонатъ параллельными съ другою, представимъ первыя чрезъ x , вторыя чрезъ y , а степень гиперболы чрезъ a , то гиперболическое уравненіе въ такомъ видѣ будетъ $xy = aa$.

305. Однако должно твердо помнить, что сіи уравненія тогда только могутъ относиться къ означеннымъ нами теперь линиямъ, когда одна изъ неопредѣленныхъ, на примѣръ y будетъ считаться отъ той же линии, на которой щетъ свой имѣютъ x ; ибо изъ эллипсическихъ или гиперболическихъ уравненій могутъ быть такія, которыя не относятся къ сопряженнымъ діаметрамъ, а параболическое не показывая никакой взаимности между абсциссами и тѣмъ, что мы доселѣ называли *ордонатами*, представляютъ со всемъ тѣмъ одинакой видъ съ изслѣдованными выше. На примѣръ положимъ, что SM' и CN (фиг. 42) представляютъ два сопряженные полупоперешника въ эллипсисѣ, для которыхъ дана была бы та-

кая эквація $уу = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$, гдѣ $CM' = \frac{1}{2}a$, $CN = \frac{1}{2}b$, $CQ = x$, и $QM = y$; и такъ есмьли чрезъ центръ C проведемъ прямую линію FCE неопредѣленной величины, пересѣкающую орднату QM въ E , ко-ей часть CE изобразится чрезъ z , попомъ чрезъ точку B , взяшую на извѣстномъ раз-стояніи $BC = m$, продолжимъ BE парал-лельно съ QM , и CF изобразится чрезъ n , то въ подобныхъ треугольникахъ CBF , CQE получишь $m : n = x : z$, слѣд. $x = \frac{mz}{n}$; по вставкѣ сей величины x въ предыдущемъ уравненіи, оно перемѣнится въ $уу = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - \frac{mmzz}{nn})$, или $aannуу = \frac{1}{4}aabbnn - bbmmzz$, или наконецъ въ $уу = \frac{bbmm}{aann} (\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz)$, уравненіе, имѣющее одинакой видъ съ пер-вымъ; но которе, какъ явствуемъ, не мо-жно справедливо почитать за принадлежа-щее сопряженнымъ діаметрамъ; ибо абсцис-сы z взяты на CE , а ординаты y или QM имѣютъ свой щетъ отъ точки Q , гдѣ ли-нея EM параллельная съ CN пересѣкаетъ CM' .

306. И такъ заключимъ вообще, 1^е что эквація второй степени съ двумя не-опредѣленными количесвами x и y , изъ

которыхъ одно считается онѣ той же линіи, на которой щетѣ свой ведетѣ и другое, принадлежитѣ эллипсису относительно къ сопряженнымъ діаметрамъ его, или кругу тогда, когда въ семѣ уравненіи не будетѣ, кромѣ квадратовъ x и y другихъ степеней, и при томѣ квадраты x и y будутѣ стоятъ въ разныхъ частяхъ уравненія съ противными знаками, а извѣстное количество, находящееся въ одной части съ квадратомъ, имѣющимъ знакъ —, будетѣ само съ +. Въ противномъ случаѣ такое на примѣръ уравненіе $yy = \frac{bb}{aa} \left(-\frac{1}{4}aa - xx \right)$ не изобразитѣ никакой возможной линіи, потому что оно выводитѣ $y = \pm \sqrt{\left[\frac{bb}{aa} \left(-\frac{1}{4}aa - xx \right) \right]}$ неизвлекаемое количество.

307. 2^е. Когда каждый изъ квадратовъ yy и xx перенесенъ будучи въ разныя части уравненія, останется съ одинакимъ знакомъ, и при томѣ не будетѣ другихъ степеней x и y , кромѣ ихъ квадратовъ; тогда такое уравненіе принадлежитѣ всегда гиперболѣ относительно къ діаметру, оканчивающемуся при кривой линіи или къ его сопряженному, глядя по извѣстному члену, съ какимъ онѣ стоитѣ знакомъ, съ противнымъ

или одинакимъ въ разсужденіи квадратовъ xx и yy .

308. 3°. Уравненіе, заключающее въ себѣ квадратъ одного только неопредѣленного количества, и состоящее изъ двухъ членовъ, изъ которыхъ второй представляетъ произведение другого неопредѣленного на извѣстное количество, принадлежитъ параболѣ относительно къ діаметрамъ ея тогда, когда оба сіи члена, поставленные въ разныхъ частяхъ уравненія, будутъ находиться съ одинакимъ знакомъ; когдажъ съ разными, тогда уравненіе не изображаетъ никакой возможной линіи.

309. Наконецъ уравненіе, заключающее въ себѣ два члена, изъ которыхъ одинъ состоитъ изъ произведенія двухъ неопредѣленныхъ x и y , а другой изъ извѣстнаго количества, изображаетъ всегда гиперболу относительно къ асимптотамъ ея.

310. Таковы суть уравненія коническихъ сѣченій, которыя относятся къ различнымъ линіямъ, изслѣдованнымъ нами. Мы увидимъ употребленіе ихъ ниже; а теперь не бесполезно предувѣдомить, что по всякому уравненію съ двумя неопредѣленными x и y , заключающему въ себѣ предло-

женныя условія, можно удобно сдѣлать кон-
спрукцію въ такомъ коническомъ сѣченіи,
которому оно будетъ принадлежать, посту-
пая по слѣдующему примѣру.

Пусть будетъ дано для конспрукціи такое ура-
вненіе $ncd - quu = gxx$. Напишемъ его такъ $quu =$
 $ncd - gxx$, пономъ раздѣливъ вторую часть на g
и представивъ умноженіе на поже g въ показаніи,
изобрази чрезъ $quu = g \left(\frac{ncd}{g} - xx \right)$, и наконецъ
чрезъ $uu = \frac{g}{q} \left(\frac{ncd}{g} - xx \right)$; но уравненіе въсемъ видѣ
(243 и 245) принадлежитъ эллипсису, котораго содер-
жаніе квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ есть $\frac{g}{q}$,
а квадратъ поже изъ поперешниковъ, на которомъ онъ
еще свой имѣюмъ, представляется чрезъ $\frac{4ncd}{bb}$. Въ
самомъ дѣлѣ сравнивъ эту эквацію съ $uu = \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{4} aa \right.$
 $\left. - xx \right)$, получишь $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, а $\frac{1}{4} aa = \frac{ncd}{g}$. По симъ
уравненіямъ выведи $a = \sqrt{\left(\frac{4ncd}{g} \right)}$ и $b = \sqrt{\left(\frac{ncd}{q} \right)}$,
чрезъ что опредѣлишь оба сопряженные діаме-тра.
Что касается до угла, которой долженъ заключа-
ться между поперешниками, то онъ будетъ пошъ же,
какой содержится между линиями x и y ; уголъ же
сей предлагаемый извѣстнымъ по самой задачѣ, изъ
которой выведено уравненіе $ncd - quu = gxx$. Номъ
видѣли (254), какимъ образомъ по извѣстнымъ шремъ
количесивамъ такого рода описывается эллипсисъ.

Такимъ же образомъ поступать должно
съ экваціями прочихъ коническихъ сѣченій,
когда онъ будутъ относиться къ какимъ

нибудь предложеннымъ выше. Мы увидимъ, что вообще всякое уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными изображаетъ всегда коническое сѣченіе, или не изображаетъ никакой возможной линии (*); это доказываешь тѣмъ, что всякое уравненіе такого рода можетъ представлено быть въ видѣ нѣкотораго изъ изслѣдованныхъ. Мы намерены теперь показать способъ, какъ приводить ихъ въ такой видъ; а чтобы болѣе придать ясности употребленію сего способа и производимымъ по оному конструкціямъ, то помѣстимъ напередъ слѣдующія разсужденія.

311. Поелику изъ всякой задачи, разрѣшаемой Алгебраически, выводится всегда одно или многія уравненія, то всякое уравненіе съ двумя неопредѣленными x и y можно почиташъ за такое, которое вышло изъ извѣстной задачи, въ которой оба сіи неопредѣленные представляли неизвѣстныя ко-

Ц 4

(*) Надобно изъяснить снсюда одинъ только случай, гдѣ уравненіе выходитъ изъ произведенія двухъ факторовъ первой степени, такихъ на примѣръ, какъ $ax + by + c$ и $dx + fy + g$; такое уравненіе не можетъ по справедливости почтеться здѣсь дѣйствительно второй степени; но какъ сей случай ни къ чему не служитъ, то мы его оставляемъ.

личества; уравнение сіе, какого бы рода не была задача, можно принимать всегда изображающимъ свойство кривой линии; въ этомъ не трудно увѣриться, попому что положивъ произвольно за какое нибудь изъ неизвѣстныхъ, на примѣръ за u , многія попеременно величины, можно вычислить при всякомъ случаѣ помощію той же эквации и Алгебраическихъ правилъ величину t . Отсюда явствуетъ, что ничто не препятствуетъ означать на неопредѣленной линіи AR (фиг. 42, 43 и 44) величинъ AP , AP и проч., принятыхъ за u , проводить чрезъ точки P , P и проч. линіи PM , PM и проч., параллельныхъ между собою и подъ опредѣленнымъ угломъ, и дѣлать сіи послѣднія равными соотвѣстственнымъ величинамъ, найденнымъ для t ; спезя точекъ M , M и проч., опредѣленныхъ такимъ образомъ, представить кривую линію, которой свойство должно зависѣть отъ взаимнаго отношенія линіи AP и PM ; а какъ отношеніе сіе изображается въ той же эквации, изъ которой выведены самыя линіи, то она же должна изображать и нашу кривой линіи,

312. Посмотримъ теперъ, какимъ образомъ можно представить всякое уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными

въ такомъ видѣ, какой приличенъ коническимъ сѣченіямъ относительно къ линеймъ (304).

313. Но чѣмъ бытъ въ состояніи поступать по способу, которой мы намѣрены предложить, то должно напередъ умѣть уничтожать второй членъ въ уравненіи второй степени. Правило этого дѣйствія весьма просто. Надлежитъ по уничтоженіи въ квадратахъ неизвѣстнаго множителя или дѣлителя его приравнять неизвѣстное усугубленное (или уменьшенное, когда второй членъ будетъ съ знакомъ —) половиною коэффициента или множителя x во второмъ членѣ къ новому неизвѣстному.

На примѣръ для уничтоженія второго члена въ слѣдующей экваци $4x^2 + 12x = 9$, дѣлю всѣ члены ея на 4 и получаю $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; дѣлаю $x + \frac{3}{2} = z$, по составленіи квадрата нахожу $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = zz$, и слѣд. $x^2 + 3x = zz - \frac{9}{4}$; сравнивъ сію эквацию съ $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, нахожу $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, или $zz = \frac{18}{4}$ уравненіе безъ второго члена.

Еслили будетъ дано другое уравненіе итакое $x^2 - 4x = 7$; то сдѣлавъ $x - 2 = z$ составлю квадраты изъ обихъ частей послѣдняго и получу $x^2 - 4x + 4 = zz$, или $x^2 - 4x = zz - 4$; понюмъ вставивъ въ первомъ уравненіи равныя количества за равныя, буду имѣть $zz - 4 = 7$, или $zz = 11$ уравненіе безъ второго члена.

314. Можно также, кому угодно, приравнять неизвѣстное, усугубленное полови-

ною коэффиціента второго члена не только просто къ другому неизвѣстному, но и умноженному или раздѣленному на произвольное количество; сіе замѣчаніе въ нѣкоторыхъ случаяхъ намъ будетъ надобно.

На примѣръ въ уравненіи $x^2 - 4x = 7$ вмѣсто $x - 2 = z$, какъ было показано выше, могу сдѣлать $x - 2 = \frac{k}{n} z$; послѣ чего поступая такимъ же образомъ, выведу $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, и слѣд. $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$, наконецъ по вслѣдствію $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$, или $\frac{kk}{nn} zz = 11$.

Средства привести всякое уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными, изображающее возможную линию, въ уравненія Коническихъ сѣченій.

315. Положимъ, что $dt + ct + eu + fdt + geu + hd^2 = 0$ представляетъ такое уравненіе, которое заключаетъ въ себѣ уравненія всякаго рода второй степени съ двумя неопредѣленными u и t , и въ которомъ недоспѣшка нѣтъ ни въ какомъ членѣ. Представимъ, что уравненіе сіе принадлежитъ кривой линіи ММ (фиг. 42 и 43), коей АР и РМ изображаютъ координаты. Вотъ какимъ образомъ можно увѣриться, что

эта кривая линия состоитъ изъ коническаго сѣченія, и вотъ какъ это коническое сѣченіе опредѣляется.

Должно во первыхъ, когда оба изъ квадратовъ t^2 и u^2 находятся въ уравненіи, уничтожишь второй членъ онаго по буквѣ t , потомъ второй же членъ по буквѣ u , что произведи слѣдующимъ образомъ.

Заклѣчивъ въ скобкахъ все, что умножаетъ первую степень t , удали отъ tt множителя его d , послѣ чего произойдетъ $tt + (f + \frac{cu}{d})t + \frac{cuu}{d} + \frac{gu}{d} + hd = 0$ (А). Сдѣлай (313) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, составъ изъ каждой части сего уравненія квадраты, выдѣль $tt + (f + \frac{cu}{d})t + \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} = yy$, и слѣд. $tt + (f + \frac{cu}{d})t = yy - \frac{1}{4}ff - \frac{fcu}{2d} - \frac{ccuu}{4dd}$; сравнивъ уравненіе сѣ съ показаннымъ въ (А), и сдѣлавъ въ немъ такую переставку членамъ, чибѣ yy останется одинъ, получишь $yy = \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} - \frac{guu}{d} - \frac{hd}{d}$, или по умноженіи всего на $4dd$ и по сокращеніи членовъ, умножаемыхъ на подобныя степени u , будешь наконецъ имѣть $4ddyy = ffd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)u^2$.

Поскольку d, c, e, f и проч. изображаютъ извѣстныя количества, то можно для сокращенія выкладки представить $ffd - 4hd^3$ одною буквою r , $2cfd - 4ged$ чрезъ q , и $cc - 4de$ чрезъ m ; послѣ чего экваці превратится въ $4ddyy = r + qu + mu^2$; въ копоръ m, q, r могутъ быть положительными или отрицательными количествами.

Уничтожь теперь второй членъ по буквѣ u ; для сего удаливъ опѣ uu множилъ его, предсавъ уравненіе въ такомъ видѣ $u^2 + \frac{q}{m} u + \frac{r}{m} = \frac{qdd}{m} uu$ (B).

Сдѣлай $u + \frac{q}{2m}$ равнымъ не просто уже новому неопредѣленному x по правилу (313), но $= \frac{qx}{2mn}$ (314), то есть, равнымъ новому неопредѣленному x , умноженному на половину коэффициента второго члена и раздѣленному на произвольное количество n , которое на нѣкоторое время оспасаея неизвѣстнымъ, но послѣ опредѣляется (*).

По составленіи квадратовъ изъ обѣихъ частей $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ выходитъ $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mt} = \frac{q^2 x^2}{4m^2 n^2}$, или $uu + \frac{qu}{m} = \frac{q^2 x^2}{4m^2 n^2} - \frac{qq}{4mt}$. Сравнивъ уравненіе сіе съ означеннымъ въ (B), получишь $\frac{q^2 x^2}{4m^2 n^2} - \frac{qq}{4mt} + \frac{r}{m} = \frac{qdd}{m} uu$ уравненіе, которое будетъ принадлежать эллипсису или гиперболѣ, еслили никакое изъ извѣстныхъ количествъ d, m, q, r и проч. не равно нулю, и еслили оно предсавляетъ возможную линію.

Разсмотримъ теперь, въ какихъ случаяхъ уравненіе сіе предсавляетъ кривую линію, относящуюся къ эллипсису, въ ка

(*) Количество сіе n вводится для того, чтобъ получить прямо уравненіе, принадлежащее сопряженнымъ діаметрамъ. Еслили же приравняемъ просто къ x , то конечное уравненіе хотя и получитъ видъ эллипсическаго или гиперболическаго уравненія, однако будетъ относиться къ шому случаю, о которомъ разсуждали мы (305).

кихъ къ гиперболѣ, и въ какихъ наконецъ случаяхъ оно не представляетъ никакой кривой лини.

Для достиженія сего, уничтожимъ коэффициентъ въ $уу$; отъ чего произойдетъ

$$уу = \frac{qqxx}{16mnda} - \frac{qq}{16mnd} + \frac{r}{4d}, \text{ потомъ раз-}$$

дѣливъ вторую часть сего уравненія на коэффициентъ количества xx и представивъ умноженіе на того же коэффициента въ по-

$$\text{казаніи, будемъ имѣть } уу = \frac{qq}{16mnda} (xx -$$

$$nn + \frac{4mrnn}{qq}) \text{ такое уравненіе, въ которомъ}$$

знаки не могутъ перемѣниться, пока m и r останутся положительными; ибо количества q , n , d состоятъ изъ квадратовъ; свойство кривой лини не перемѣнится также отъ перемѣны знака въ r , потому что r , будучи положительнымъ или отрицательнымъ, не дѣлаетъ никакой перемѣны въ знакахъ квадратовъ $уу$ и xx . Чтожъ касается до m , еслии оно будетъ отрицательнымъ, то эквація въ такомъ случаѣ стано-

$$\text{вится } уу = \frac{qq}{-16mnda} \times (xx - nn - \frac{4mrnn}{qq}),$$

$$\text{или по перемѣнѣ знаковъ сверху и снизу}$$

$$уу = \frac{qq}{16mnda} \times (nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx).$$

Отсюда явствует (306 и 307), что пока m будетъ положительнымъ количествомъ, кривая линия представляетъ гиперболу; кой же часъ сдѣлается m отрицательнымъ, то она превращается въ эллипсисъ; но поелику количество m изображено выше чрезъ $ss - 4de$, гдѣ s будучи квадратомъ, должно быть всегда положительнымъ; почему m или $ss - 4de$ не можетъ сдѣлаться отрицательнымъ, пока $4de$ будетъ меньше ss .

316. Почему желая узнать, въ какихъ случаяхъ уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными u и t , такое на примѣрѣ, какъ $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$ принадлежитъ эллипсису или гиперболѣ, должно изслѣдовать, какое количество представляетъ квадратъ ss коэффиціентъ члена ut , безъ учетвереннаго произведенія de коэффиціентовъ членовъ t^2 и u^2 , положительное или отрицательное; въ первомъ случаѣ кривая линия будетъ гиперболою, а во второмъ эллипсисомъ. Надлежитъ только исключивъ отсюда пошлѣ случай, когда r , представляя въ эллипсисѣ отрицательное количество, будетъ больше $\frac{qq}{4m}$; ибо количество $m + \frac{4mnp}{qq}$ превратившись въ $m - \frac{4mnp}{qq}$

или въ nn ($1 - \frac{4mr}{qq}$), становится отрицательнымъ, если $\frac{4mr}{qq}$ больше 1, или если, что все равно, $4mr$ больше qq , или наконецъ r больше $\frac{qq}{4m}$; въ такомъ случаѣ величина y и слѣд. кривая линия превращается въ количество умственное.

Остается еще показать, какимъ образомъ по такомъ изслѣдованіи должно чертить эллипсисъ и гиперболу; посмотримъ напередъ на эллипсисъ.

317. Изъ двухъ уравненій $t + \frac{1}{2}f + \frac{cx}{2d} = y$, и $n + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, выведенныхъ нами для уничтоженія вторыхъ членовъ, послѣднее по настоящему предположенію m количествомъ отрицательнымъ, превращается въ $n - \frac{q}{2m} = \frac{-qx}{2mn}$; а какъ количество n введено произвольно, то можно принять его за положительное или отрицательное; принявъ его отрицательнымъ, получимъ $n - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$. Теперь сдѣлаемъ конструкцію по двумъ симъ уравненіямъ, и опредѣлимъ ею положеніе сопряженныхъ діаметровъ.

Первое уравненіе, именно $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$
 $= y$ показываетъ, что для опредѣленія ве-
 личины y должно усугубить каждое t коли-
 чествомъ $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$; и для того провожу
 чрезъ точку А, начало количествъ u и t
 (фиг. 42) линію АВ $= \frac{1}{2}f$, параллельную
 съ линіями РМ или t ; чрезъ точку В прово-
 жу ВКІ параллельную съ АР, на которой
 счетъ свой имѣютъ u , и взявши произволь-
 но ВК, продолжаю параллельно съ АВ ли-
 нію КЛ такую, которая бы содержалась къ
 ВК $= \frac{1}{2}c:d$; естли чрезъ точки В и L
 проведена будетъ линіа ВLQ неопредѣленной
 величины, то линіа QM, считаемя отъ
 точекъ Q, гдѣ сія линіа пересѣкаетъ ли-
 ніи РМ, будутъ служить величинами y . Ибо
 $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ =$
 $t + \frac{1}{2}f + IQ$; притомъ же въ подобныхъ
 треугольникахъ ВКІ и ВІQ получаемъ ВК:
 КЛ $=$ ВІ или АР:ІQ, то есть, $d : \frac{1}{2}c =$
 $u : IQ = \frac{cu}{2d}$; слѣд. $QM = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$
 $= y$. Поелику y считаются отъ линіи LQ,
 то должно (305) для отвесенія эллиптиче-
 ской экваціи, найденной выше, къ сопряжен-
 нымъ діаметрамъ, вести счетъ количествамъ
 x отъ линіи ВLQ; точка, откуда начи-
 нается счетъ, представитъ центръ; та-

кимъ образомъ QLB показываетъ направление одного изъ діаметровъ. Посмотримъ, какъ можно опредѣлить центръ.

Второе уравненіе $\frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ показываетъ, что если на AP или n взята будетъ AG $= \frac{q}{2m}$, то количество GP равное AP — AG, сдѣлается равно также $n - \frac{q}{2m}$, и слѣд. $\frac{qx}{2mn}$; почему GP $= \frac{qx}{2mn}$; но еслии чрезъ точку G проведешь NGC параллельно съ линиями PM, то точка C, гдѣ она пересѣчется съ LQ, будетъ началомъ x , и слѣд. центромъ; ибо видѣли мы, что x должны считаться на LQ; но когда GP будетъ равна нулю, то и величина ея $\frac{qx}{2mn}$ должна также равняться нулю; слѣд. x не имѣетъ въ такомъ случаѣ никакой величины, и потому точка C должна представлять начало количествъ x ; и такъ у представляющихъ линіи QM, а x линіи CQ. Послѣ сего не трудно опредѣлить величину n ; ибо GP $= \frac{qx}{2mn}$, или (по вставкѣ за x величины CQ, а за $\frac{q}{2m}$ величины AG), GP $= \frac{AG \times CQ}{n}$; слѣд. $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; но по причинѣ параллельныхъ линій QR, CG и AB выходитъ GP:

Часть III.

Ч

$$AG = CQ : BC = \frac{AG \times CQ}{GP}; \text{ слѣд. } n = BC;$$

то есть, чтобъ найденная выше эллипсическая эквація относилась къ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ направленіе показывають QB и CN, должно за величину n принять линію BC, которая опредѣлена предыдущими конструкціями.

И такъ для начерченія эллипсиса остается теперь опредѣлить величину сопряженныхъ діаметровъ, потому что уголъ BCN, которой они составляютъ, опредѣленъ уже въ предыдущихъ дѣйствіяхъ. Но это можно сдѣлать безъ всякаго затрудненія, поступая по предписанному (310), именно сравнивъ эквацію $yy = \frac{qq}{16mddnn} (nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx)$ съ экваціею $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$. Изъ сего сравненія выходитъ $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddnn}$ и $\frac{1}{4}aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; слѣд. $a = \sqrt{4nn + \frac{16mnnr}{qq}}$, а $b = \sqrt{\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd}}$; но поелику n, m, q, r, d представляютъ извѣстные количества, то величина сопряженныхъ діаметровъ становится теперь извѣстною. И такъ по извѣстнымъ діаметрамъ и углу ихъ BCN начерти эллипсисъ, какъ было предписано (252).

318. Замѣтимъ здѣсь, что естли величины a и b будутъ равны, и при томъ уголъ BCN прямой, то кривая линия представляеть кругъ. А чтобъ узнать, въ какихъ случаяхъ это можетъ быть, то е.е. должно предположить, что въ настоящемъ эллипсическомъ уравненіи $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, то есть, $qq =$

$16mddnn$, откуда выходитъ $nn = \frac{qq}{16mdd}$. 2е. Естли

уголъ BCD прямой, то должно, чтобъ $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; но $BC = n$; при томъ въ подобныхъ треугольникахъ BCD , BKL получаемъ $BK :$

$KL = BD$ или $AG : CD$, то есть, $d : \frac{1}{2}c = \frac{q}{2m} : CD$

$= \frac{qc}{4md}$; слѣд. $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mtdd} = \frac{qq}{4mt}$, или $m + cc$

$= 4dd$; но поелику количество m есть отрицательное, то выходитъ $cc - 4de = -m$, или $m = 4de - cc$; изъ сего слѣдуетъ, что $4de = 4dd$, или $d = e$.

319. И такъ желая узнать, что представляетъ кривая линия, кругъ ли, эллипсисъ или гиперболу, не должно смотрѣть на послѣдніе три члена fdt , geu и hd^2 экваціи $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, но на три первые; ибо естли d , c и e таковы, что $cc - 4de$ будетъ представлять положительное количество, то кривая линия относится къ гиперболѣ; эллипсису же напротивъ принадлежитъ она тогда, когда $cc - 4de$ показываетъ отрицательное количество, выключая тотъ случай, когда $d = e$; то есть, когда оба квадраты u^2 и t^2 будутъ имѣть одинакой коэффициентъ, тогда кривая линия

состоитъ изъ круга, естли уголъ ВСД окажется по предыдущей конструкціи прямымъ.

320. Все сказанное нами, кромѣ параграфа 318, принадлежитъ равно и для гиперболы, то есть, уравненію $yy = \frac{qq}{16mnpd}$ ($xx - m + \frac{4mrnp}{q^2}$) съ одною разностью въ знакахъ. И такъ перечитавши все изъясненное выше, и применивъ оное къ *фигурѣ* 43, не нужно дѣлать другой перемѣны, кромѣ переноски АС на прошивную сторону АР, что означается самымъ уравненіемъ $x + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, которое выведено (317). Чтожъ касается до прочаго, то оно остается одинаково, и слѣд. одно только названіе *эллипсиса* перемѣняется въ *гиперболу*.

Хотя въ нѣкоторыхъ особыхъ случаяхъ количества АС, ВК, АВ, КЛ (*фиг.* 42 и 43) могутъ быть расположены совѣмъ инымъ образомъ, нежели какъ мы ихъ здѣсь видимъ; однако перемѣны сїи можно всегда узнать по знакамъ количествъ d, c, f, m, q и проч. въ уравненіяхъ $x + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, и $x + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, которыя выходятъ по уничтоженіи вторыхъ членовъ.

321. Остается еще разсмотрѣть намѣ два случая: 1^е, когда $cc - 4de = 0$; 2^е, когда вмѣстѣ и $d = 0$ и $e = 0$.

Въ первомъ случаѣ, именно, когда $cc - 4de = 0$, или когда $cc = 4de$, кривая линейя состоитъ изъ параболы. Прелику количество m бываетъ тогда равно нулю, то предыдущая конструкція становится бесполезною; ибо по уничтоженіи втораго члена относительно къ буквъ t , членъ u^2 самъ уничтожается. Сей случай представляется тогда, когда по разсмотрѣніи экваціи выходитъ $cc = 4de$, то есть, когда при члена t^2 , ut и u^2 составляютъ квадраты; потому что изъ $cc = 4de$ выводится $c = 2\sqrt{de}$, а это перемѣняетъ при первые члена экваціи въ $dt^2 + 2ut\sqrt{de} + eu^2$ въ такое количество, которое изображаетъ квадраты изъ $t\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

Еслили въ такомъ предположеніи уничтожишь, какъ показано выше, второй членъ начального уравненія по буквъ t , то оно перемѣнится въ $4ddyy = r + qu$; но чтобы представить сіе послѣднее уравненіе въ видѣ $yy = px$, которое (301) принадлежитъ параболѣ относительно къ какому нибудь діаметру ея, коего ордонаты парал-

дельны съ тангенсомъ, проведеннымъ къ верху того же поперешника, уничтожь въ $уу$ множителя, отъ чего произойдетъ $уу = \frac{r + qu}{4dd}$; сдѣлай вторую часть сего уравненія равною новому неопредѣленному x , умноженному на количество n , которое опредѣлится такъ, какъ ниже увидимъ, то есть, сдѣлай $\frac{r + qu}{4dd} = nx$; послѣ чего $уу = nx$. Теперь споймъ только сдѣлать конструкцію какъ для экваціи $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, которая служила къ уничтоженію втораго члена по буквѣ t , такъ и для экваціи $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, служащей для втораго приведенія. Поелику первая изъ нихъ сходствуемъ въ точности съ тою, для которой сдѣлана конструкція (317), то можно ее сочинить по *фигурѣ* 44, сдѣлавъ всему тому приноравку, что сказано было (317) для *фигуры* 42; что касается до конструкціи $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, то линии QM (*фиг.* 44) будутъ представлять y , а BLQ будетъ служить направлениемъ діаметра, на которомъ x полагаютъ свой счетъ.

Для опредѣленія начала абсциссъ x , и слѣд. верха самаго діаметра, надлежитъ

употребить эквацію $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, изъ которой выводя $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$ заключаемъ, что еслии взято будетъ съ противной стороны AP количество AG = $\frac{r}{q}$, то произойдетъ GP = $\frac{4ddnx}{q}$, потому что GP = AP + AG = $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; и такъ еслии чрезъ точку G проведешь GCD параллельную къ линиямъ PM, и пересѣкающую QLB въ C, то точка C будетъ началомъ x , потому что изъ уравненія GP = $\frac{4ddnx}{q}$ явствуетъ, что какъ скоро GP будетъ равно нулю, то и x должно также равняться нулю; притомъ количества x долженствуя имѣть счетъ свой на линіѣ, отъ которой простираются y , будутъ непременно вести оной на BQ.

Теперь стоитъ только опредѣлить параметръ n . А какъ нашли мы, что GP = $\frac{4ddnx}{q}$, и притомъ по причинѣ параллельныхъ линей CD и QI можно послать BC : BD или AG = CQ : DI или GP; то есть, BC : $\frac{r}{q}$ = x : $\frac{4ddnx}{q}$; то должно заключить, что BC = $\frac{r}{4ddn}$, и слѣд. $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; но r и d даны, а BC опредѣлена по конструкціи;

слѣд. n или параметръ становится теперь известнымъ. Но какъ по той же конспрукціи опредѣляю вѣснѣ и уголъ координатъ CQ и QM или x и y , то не трудно послѣ сего начертить параболу по извѣстному правилу (302).

322. Поелику общее уравненіе, въ которомъ $cc = 4de$, принадлежитъ параболѣ и не содержишь въ себѣ произведенія ut двухъ неопредѣленныхъ; изъ сего слѣдуетъ заключить, что оно не должно имѣть также и одного изъ квадратовъ t^2 или u^2 ; ибо по допущеніи c равнымъ нулю, уравненіе $cc = 4de$ или $0 = 4de$, показываетъ, что d или $e = 0$.

323. Еслии оба квадрата неопредѣленныхъ заключающія въ уравненіи, но произведенія ихъ ut не находится: то сдѣланная конспрукція (317) и относящаяся къ *фигурамъ* 42 и 43, становится легче и проще, потому что по допущеніи c равнымъ нулю, линия KL уничтожается и VL упадаетъ на BK ; она становится тогда діаметромъ, а линіи x и y параллельными съ линіями u и t . Уничтоженіе втораго члена по буквѣ u должно сдѣлать въ такомъ случаѣ безъ неизвѣстнаго n ; ибо BC , представляя n (317), становится равно

ED или AG, и слѣд. $n = \frac{q}{2m}$; а это превратитъ уравненіе $n + \frac{q}{2m} = \frac{px}{2mn}$, выведенное нами выше по уничтоженіи второго члена по буквѣ n , въ другое такое $n + \frac{q}{2m} = x$.

Отсюда явствуемъ, что кривая линия тогда только можетъ представлять кругъ, когда сверхъ упомянутыхъ (318) условий уголъ координатъ n и t будетъ прямой.

324. Если по уничтоженіи въ уравненіи, заключающемъ произведеніе nt , второго члена относительно къ какомунибудь изъ двухъ неопредѣленныхъ, на примѣрѣ относительно къ t , не останется другой степени неопредѣленного n , кромѣ квадрата его; то хотя не нужно болѣе уничтожать второй членъ по буквѣ n , однако должно сдѣлать ему такое превращеніе, именно положить $n = \frac{lx}{n}$; $\frac{l}{n}$ будетъ представлять неизвѣстную дробь, которую опредѣлимъ по конструкціи показанной (321). Мы дадимъ на это примѣрѣ ниже.

325. Если между тремя членами t^2 , nt и n^2 не будетъ доставать какогонибудь изъ квадратовъ, то уравненіе относится къ

гиперболѣ, или не изображаетъ никакой кривой линіи; потому что когда d или e равняется нулю, тогда количество $cc = 4de$ превращаясь въ cc , становится положительнымъ.

326. Наконецъ если въ уравненіи не будетъ находиться обоихъ квадратовъ t^2 и u^2 , и оно приметъ такой видъ $gut + ht - ku - l = 0$, (между количествами g , h , k , l могутъ быть иныя положительными, а иныя отрицательными); то не можно болѣе употребить для него сдѣланной (317) конструпціи. Уравненіе такое принадлежитъ гиперболѣ, относящейся къ асимптомамъ своимъ; но какъ абсциссы и ординаты не имѣютъ здѣсь счету отъ центра, то вотъ какимъ образомъ сдѣлай ихъ такими.

Уничтожь въ произведеніи ut коэффициентъ g , отъ чего произойдетъ $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$. Сдѣлай сумму количествъ, умножающихъ u , равною неопредѣленному y , то есть, $t - \frac{k}{g} = y$; откуда выходитъ $t = y + \frac{k}{g}$; вставивъ величину сію въ уравненіи $ut + \frac{ht}{g}$ и проч. $= 0$, получишь $uy +$

$\frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$; послѣ сей перемены сдѣлай сумму всѣхъ количествъ, умножающихъ y , равною новому неопредѣленному x , то есть, сдѣлай $u + \frac{h}{g} = x$, отъ чего уравненіе превратится въ $xu + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$, или въ $xu = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ такое, которое принадлежитъ гиперболѣ между ея асимптотами; абсциссы x получаютъ здѣсь счепъ свой отъ центра какой нибудь асимптоты, а ординаты y отъ той же асимптоты параллельно къ другой; наконецъ степень сей гиперболы представляетъ $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (282).

Для начерченія сей гиперболы, сдѣлай конструкторію двумъ уравненіямъ $t - \frac{k}{g} = y$, и $u + \frac{h}{g} = x$ слѣдующимъ образомъ. Изъ перваго явствуетъ, что для опредѣленія y должно уменьшить каждое t количествомъ $\frac{k}{g}$. И такъ проводи изъ точки А (фиг. 45) начала величинъ u и t линію АВ параллельную съ линіями РМ или t и равную $\frac{k}{g}$; потомъ продолживъ изъ точки В линію СВQ параллельную съ АР, получишь въ линіяхъ.

QM величины y , потому что $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Для получения величинъ x , уравнение $u + \frac{h}{g} = x$ показываетъ, что должно увеличить u , то есть, линии AP количествомъ $\frac{h}{g}$; и для того положивъ съ противоположной стороны AP линію $AG = \frac{h}{g}$, проводи GS параллельную съ линіями PM, и пересѣкающую BQ въ C; CQ будетъ представлять x , а C центръ гиперболы, которой асимптотами служатъ CQ и CS. Нашедши асимптоты и имѣя предъ глазами уравнение $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, начерти гиперболу показаннымъ (289) образомъ.

Если три первые члена t^2 , ut , u^2 не будутъ находиться въ уравненіи, то оно не изобразитъ больше кривой линіи, а представитъ прямую, для которой сдѣлай конструкцію по правиламъ, какія предписаны были для сочиненія прямыхъ линій.

327. И такъ заключимъ, что 1°. всякое уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными изображаетъ всегда кониче-

ское сѣченіе, или не изображаетъ никакой возможной кривой линіи. 2°. Сія кривая линія бываетъ или эллипсисъ, или гиперболѣ, или парабола, глядя по тому, какое представляетъ количество квадратовъ коэффициента въ произведеніи *ut* двухъ неопредѣленныхъ безъ учетвереннаго произведенія коэффициентовъ двухъ квадратовъ t^2 и u^2 , отрицательное или положительное или равное нулю; и въ особенности она можетъ быть кругомъ тогда, когда въ означенномъ отрицательномъ результатѣ коэффициенты квадратовъ u^2 и t^2 равны между собою. 3°. Наконецъ, чтобъ превратить всякое уравненіе, принадлежащее коническому сѣченію, въ такія, какія выведены были изъ разсужденій нашихъ о сихъ кривыхъ линіяхъ, должно поступать въ сходственность преподанныхъ правилъ (315, 317, 320, 321 и 326).

*Примѣненіе предыдущихъ правилъ для
рѣшенія нѣкоторыхъ неопредѣ-
ленныхъ вопросовъ.*

328. Для показанія изъясненныхъ превращеній, на самой практикѣ, предложимъ первымъ вопросомъ: *найти такую кривую линію (фиг. 46), въ которой бы разстоянія отъ каждой точки М къ двумъ постояннымъ А и В находились всегда въ одинакомъ содержаніи, именно какъ $g : h$?*

Вообразивъ изъ каждой точки М перпендикуляры МР, опущенные на линію АВ, станемъ искать

отношеніе сихъ перпендикуляровъ къ разстояніямъ ихъ AP отъ точки A , и для того назовемъ AP , u ; PM , t ; а известную линию AB , c .

По предположеніи сего, въ прямоугольномъ треугольникѣ APM получимъ $AM = \sqrt{(AP)^2 + (PM)^2} = \sqrt{(uu + tt)}$, а въ прямоугольномъ треугольникѣ BPM , $BM = \sqrt{(BP)^2 + (PM)^2}$; но $BP = AP - AB = u - c$, слѣд. $BM = \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$; а какъ припомъ по пребыванію $AM : BM = g : h$, то получимъ $\sqrt{(uu + tt)} : \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)} = g : h$; слѣд. $h \sqrt{(uu + tt)} = g \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$, или по соснавленіи квадратовъ, $hhuu + hhtt = gggu - 2ggcu + ggcc + gggt$, или $(gg - hh)uu + (gg - hh)tt - 2ggcu + ggcc = 0$ такое уравненіе, которое (318) относится къ кругу, потому что оба квадрата uu и tt сплосны въ одной и той же часпи уравненія съ одинаковымъ знакомъ и съ одинаковымъ коэффициентомъ.

Поелику не находится въ семъ уравненіи втораго члена по буквѣ t , то для представленія его въ видѣ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (317), положи неопредѣленно $t = y$; послѣ чего оно превратится въ $(gg - hh)uu + (gg - hh)yy - 2ggcu + ggcc = 0$; уничтожь второй членъ по буквѣ u ; и какъ произведеніе ut не заключающія въ уравненіи, то сплосишь только (323) для сего двѣсплосія употребить предписанное (313) правило. И для того уничтоживъ коэффициентъ въ uu , получишь $uu - \frac{2ggcu}{gg - hh} = -\frac{ggcc}{gg - hh} - yy$; сдѣлай $u = \frac{ggc}{gg - hh} = x$, и по соснавленіи квадратовъ, поставь въ первой часпи на мѣсто uu и проч. величину его $xx = \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2}$, отъ чего произойдетъ $xx = \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} = -\frac{ggcc}{gg - hh} - yy$, или $yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx$ такое уравненіе, которое сравнивъ съ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, получишь $\frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2}$, и слѣд. радиусъ $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - h^2}$. Теперь все дѣло сослосишь въ помѣ,

чтобъ опредѣлить центръ, долженствующій находиться на АВР, попому что $t = y$. Но для опредѣленія x , должно по уравненію $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$ уменьшивъ u количествомъ $\frac{ggc}{gg - hh}$; и попому сдѣлай $AC = \frac{ggc}{gg - hh}$; въ такомъ случаѣ СР будетъ представлять x , попому что она равна $AP - AC$, то есть, равна $u - \frac{ggc}{gg - hh}$; напоследокъ изъ точки С какъ изъ центра и радіусомъ равнымъ $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$ опиши кругъ; каждая точка М сего круга будетъ имѣть требуемое свойство.

Впрочемъ можно сыскать центръ и полупоперешникъ по уравненію $uu - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$; поелику центръ долженъ находиться на АР, такъ какъ мы уже замѣтили, то сдѣлавъ $y = 0$, получимъ по разрѣшеніи сего уравненія двѣ величины u , кои изобразятъ разстоянія АД, АЕ, гдѣ окружность пересѣчетъ прямую линіею АВ; и такъ раздѣливъ пополамъ DE, получишь центръ и радіусъ СЕ. По разрѣшеніи уравненія $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh}$, выходитъ $u = \frac{g^2c}{gg - hh} \pm \sqrt{\left(\frac{gghhcc}{(gg - hh)^2}\right)} = \dots$
 $\frac{g^2c \pm ghe}{gg - hh} = \frac{gc(g \pm h)}{(g - h)(g + h)}$; послѣднее уравненіе представляетъ двѣ такія величины, $u = \frac{gc}{g + h} =$
 АД, и $u = \frac{gc}{g - h} =$ АЕ.

329. Предложимъ вторымъ вопросомъ слѣдующій: сыскать въ данной линіи АР (фиг. 47) множество разныхъ точекъ М такого свойства, чтобъ, по проведеніи изъ нихъ къ послѣднимъ точкамъ А

и R прямымъ линей MA и MR, си прямая линей заключали всегда уголъ AMR равный данному?

Представимъ чрезъ r синусъ цѣлой или радіусъ таблицъ, а чрезъ t тангенсъ даннаго угла, которому AMR долженъ быть равенъ; опустимъ перпендикуляръ MP, и назовемъ AP, u ; PM, t ; AR, b ; получимъ $PR = b - u$.

Припомнимъ теперь при доказанныя предложенія (Геом. 282, 286 и 287, именно, что по допущеніи A и B углами, выходитъ

$$1^{\text{е}} \text{ син. } (A+B) = \frac{\text{син. } A \text{ кос. } B + \text{син. } B \text{ кос. } A}{r};$$

$$2^{\text{е}} \text{ кос. } (A+B) = \frac{\text{кос. } A \text{ кос. } B - \text{син. } A \text{ син. } B}{r};$$

$$3^{\text{е}} \text{ танг. } (A+B) = \frac{r \text{ син. } (A+B)}{\text{кос. } (A+B)}.$$

По предположеніи сего, въ прямоугольныхъ треугольникахъ APR, RMP получимъ (Геом. 299: AM: AP = r : син. AMP; AM: PM = r : син. MAP или кос. AMP; RM: RP = r : син. RMP; RM: PM = r : син. MRP или кос. RMP, отсюда выходитъ син.

$$\text{AMP} = \frac{r \times \text{AP}}{\text{AM}}; \text{кос. AMP} = \frac{r \times \text{PM}}{\text{AM}}; \text{син. RMP} =$$

$$\frac{r \times \text{RP}}{\text{RM}}; \text{кос. RMP} = \frac{r \times \text{PM}}{\text{RM}}; \text{а какъ AMR} = \text{AMP}$$

$$+ \text{RMP, то получимъ въ сходственныхъ припомянутыхъ формулъ, син. AMR} = \frac{r \times \text{AP} \times \text{PM} + r \times \text{RP} \times \text{PM}}{\text{AM} \times \text{RM}}$$

$$= \frac{r \times \text{AR} \times \text{PM}}{\text{AM} \times \text{RM}}, \text{и кос. AMR} = \frac{r \times (\text{PM})^2 - r \times \text{AP} \times \text{RP}}{\text{AM} \times \text{RM}};$$

$$\text{слѣ. } \frac{r \text{ син. AMR}}{\text{кос. AMR}}, \text{или танг. AMR} = \frac{r \times \text{AR} \times \text{PM}}{(\text{PM})^2 - \text{AP} \times \text{RP}};$$

или по вставкѣ Алгебраическихъ величинъ и по приведеніи $m = \frac{rbt}{tt - bu + uu}$, откуда выходитъ $mtt +$

$tuu - tui - rbt = 0$, уравненіе относящееся къ кругу, какъ того и ожидалъ надлежало.

Для опредѣленія центра и радіуса, должно пред-
ставить сіе уравненіе въ видѣ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. По-
чему уничтожаю въ x коэффициентъ его, ошъ чего
производнишь $x - \frac{rb}{m} x - bu + uu = 0$; дѣлаю (313)

$x = \frac{rb}{2m} + y$, и поступаю по предписанному тамъ

правилу, превращаю уравненіе въ $yy = \frac{rrbb}{4mm} - bu +$

$uu = 0$. Теперь оспрашивается уничтожить въпрѣй членъ
по буквъ u ; но какъ произведенія uu не находится въ
эквации, то дѣлаю просто (323) $u - \frac{b}{2} = x$, и

вывожу уравненіе $yy = \frac{rrbb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = 0$, или

$yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, которе сравнивъ съ $yy = \frac{1}{4}aa$

$- xx$, нахожу, что $\frac{1}{4}aa = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}$, и слѣд. раді-

усъ $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$.

Для опредѣленія центра и радіуса должно по
уравненію $x - \frac{rb}{2m} = y$ провести АВ параллельно съ
РМ, то есть, поставивъ изъ точки А перпендику-
ляръ АВ $= \frac{rb}{2m}$, продолживъ ВСQ параллельно съ АР;
линей QМ представляяъ y , потому что QМ $=$ РМ
 $-$ РQ $=$ РМ $-$ АВ $= x - \frac{rb}{2m} = y$.

Еслили по уравненію $u - \frac{b}{2} = x$, положу на
АР часть АG $= \frac{b}{2}$, то GР изобразитъ x , потому что
GР $=$ АР $-$ АG $= u - \frac{b}{2} = x$. И такъ продол-
живъ изъ точки G линей GС параллельно съ РМ, по-

Часть III.

III

лучу C за центрѢ. По проведеніи AC , буду имѣть, по причинѢ прямого угла G , $AC = \sqrt{[(AG)^2 + (GC)^2]} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$; слѣд. AC представимѢ радиусѢ.

И такѢ въ производствѢ конструкціи поступай слѣдующимѢ образомѢ: поспавъ изѢ середины AR перпендикулярѢ $GC = \frac{rb}{2m}$, и опиши изѢ точки C , какѢ изѢ центра, и радиусомѢ CA кругѢ; всякой уголѢ MAR , имѣющій верхѢ свой при окружности и проходящій боками своими чрезѢ точки A и R будетѢ равенѢ данному углу. Для сочиненія же количесва $\frac{rb}{2m}$ должно провести прямую AO такую, которая бы сдѣлала сѢ AB уголѢ BAO , равный данному; она прорѣжетѢ GC въ искомой точкѢ C ; ибо въ прямоугольномѢ треугольникѢ ABC можно послать r : танг. $BAC = AB : BC$ или AG , то есть, $r : m = AB : \frac{1}{2}b$; слѣд. AB или $GC = \frac{rb}{2m}$.

Отсюда заключимѢ наконѣдѢ, что для совершенія той же конструкціи, должно провести изѢ точки A линію AO такую, которая бы сѢ AR сдѣлала уголѢ RAO , равный дополненію даннаго угла къ 90° ; сія линія прорѣзавѢ въ C перпендикулярѢ GC , поставленный изѢ середины AR , представимѢ въ C центрѢ, а въ CA радиусѢ круга.

330. По предыдущему разсужденію не трудно рѣшивъ и слѣдующій вопросѢ: Зная положеніе трехѢ точекѢ R , A , R' (фиг. 48) и углы, подѢ которыми видны изѢ нѣкоторой точки M линіи RA , AR' , сыскать эту точку M ?

ИзѢ середины G и G' двухѢ линій RA и AR' поспавъ перпендикуляры GC и $G'C'$; чрезѢ точку A продолжи линіи AC и AC' , изѢ которыхѢ бы каждая сѢ AR и AR' сдѣлала углы RAC , $R'AC'$ равныя дополненію угловѢ MA , $R'MA$, подѢ коими видны извѣстныя линіи.

Изъ точекъ C и C' , какъ изъ центровъ и радиусами CA , $C'A$ опиши два круга, коихъ окружности пересѣкутся въ A и M ; точка M будетъ искомая. Въ справедливости сего можно увѣриться рѣшеніемъ предыдущаго вопроса.

Задача сія можетъ служить къ означенію на картѣ положенія такой точки, изъ которой наблюденны или вымѣрены были три извѣстные предмета.

Естьли вымѣренные углы RMA , $R'MA$ будутъ равны угламъ $RR'A$ и $R'RA$, то задача въ такомъ случаѣ спланируется неопредѣленною; ибо оба круга сольются вмѣстѣ, и слѣд. каждая точка окружности ихъ выполнитъ требованіе вопроса.

331. Предложимъ претѣмъ вопросомъ найти такую кривую линію или такія кривыя линіи, которыя бы имѣли слѣдующее свойство: AZ , AT , (фиг. 49) суть двѣ линіи, составляющія между собою какой нибудь извѣстной величины уголъ, потребу тся опредѣлить такія кривыя линіи, въ которыхъ бы разстояніе отъ каждой точки M къ постоянной точкѣ F взятой на AZ , находилось всегда въ одинаковомъ содержаніи съ разстояніемъ MT отъ той же точки M къ прямой AT ; разстояніе MT предполагается параллельнымъ съ AZ ?

Вообразимъ изъ какой нибудь точки M сей кривой линіи прямую MP параллельную съ AT и перпендикуляръ MS къ AZ ; уголъ MPS будетъ извѣстенъ, и слѣд. синусъ и косинусъ его также; представимъ синусъ чрезъ p , косинусъ чрезъ q , и радиусъ таблицъ чрезъ r (*). Назовемъ AP , x ; PM , z ; напоследокъ извѣстная линіа AF пусть будетъ $= c$.

III 2

(*) Здѣсь предполагается, что количества p , q , r даны по таблицамъ; впрочемъ можно ихъ опредѣлить также самою простою конструкціею, именно сдѣлавъ прямоуглоуіной треугольникъ такой, котораго бы одинъ изъ острыхъ угловъ былъ равенъ данному MPS , а гипотенуза произвольной величины. Принявъ сію гипотенузу за r , получишь въ двухъ прочихъ бокахъ величины p и q .

По предположеніи сего въ прямоугольномъ треугольникѣ MSP получимъ (Геом. 299) $r : \sin. MPS = MP : MS$, и $r : \sin. PMS$ или кос. $MPS = PM : PS$; то есть, $r : p = z : MS = \frac{p^2}{r}$, и $r : q = z : PS =$

$\frac{q^2}{r}$. Слѣд. $FS = PS - PF = PS - AP + AF = \frac{q^2}{r} - u + c$; а какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ MSF, $MF = \sqrt{[(MS)^2 + (FS)^2]}$; то получимъ $MF = \sqrt{\left(\frac{p^2 z^2}{r^2} + \frac{q^2 z^2}{r^2} - \frac{2quz}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$, или

по причинѣ, что $p^2 + q^2 = r^2$ (Геом. 283) будемъ имѣть $MF = \sqrt{\left(z^2 - \frac{2quz}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$; напоследокъ, поелику MF должна находиться къ MT или AP въ данномъ содержаніи, то, представивъ содержаніе сіе чрезъ $g : b$, получимъ $\sqrt{\left(z^2 - \frac{2quz}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)} : u = g : b$; и слѣд. $gu = b$

$\sqrt{\left(z^2 - \frac{2quz}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$, или по сопоставленіи квадрата и по переславкѣ членовъ, $b^2 z^2 - \frac{2qb^2 uz}{r} + (b^2 - g^2) u^2 + \frac{2cb^2 qt}{r} - 2cb^2 u + b^2 c^2 = 0$ такое уравненіе, которое представляя (315 и слѣд.) коническія сѣченія, будемъ (316) относитьъ къ эллипсису, еспли въ немъ квадратъ изъ $-\frac{2qb^2}{r}$ безъ уч. прережнаго b^2 и умноженнаго на $b^2 - g^2$ изобразитъ отрицательное количество, то есть, когда $\frac{4q^3 b^4 - 4r^2 b^4 + 4r^2 b^2 g^2}{r^2}$ будетъ отрицательное; или когда (по причинѣ что $r^2 - q^2 = p^2$) наконецъ... $\frac{4r^2 b^2 q^2 - 4p^2 b^4}{r^2}$ изобразитъ отрицательное количество. Напротивъ того оно будетъ принадлежать гиперболѣ, когда $\frac{4r^2 b^2 q^2 - 4p^2 b^4}{r^2}$ изобразитъ положи-

тельное. Оно будетъ параболическое, когда

$$\frac{4r^2b^2g^2 - 4r^2b^4}{r^2} \text{ равно нулю, то есть, когда } 4r^2b^2g^2 =$$

$4r^2b^4$ или $rg = rb$. Наконецъ кривая линия будетъ состоять изъ круга, когда $b^2 = b^2 - g^2$; но это тогда только быть можетъ, когда g будетъ равно нулю, или когда b будетъ безконечнымъ количествомъ; потому что въ такомъ предположеніи g^2 въ разсужденіи b^2 почитается за ничто.

Для сочиненія кривой линии въ каждомъ изъ означенныхъ случаевъ должно поступать по предписаннымъ правиламъ (317 и слѣд.); но какъ мы тамъ сдѣлали уже чертѣжъ для эллипсиса, то постараемся теперь приоровить выведенное уравненіе къ гиперболѣ, то есть, постараемся представивъ се уравненіе въ видѣ $yy = \frac{bb}{aa} (xx - \frac{1}{2}aa)$.

Почему освободивъ въ найденномъ уравненіи t^2 отъ коэффициента, получаю $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t + \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$. Для уничтоженія второго члена по буквѣ t , дѣлаю $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, и вывожу по составленіи квадрата и по переставкѣ членовъ $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, и слѣд. по вставкѣ послѣдней величины, получаю наконецъ $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Теперь слѣдуетъ уничтожить второй членъ по буквѣ u ; но примѣтимъ, что члены
 $-\frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)u^2$ или $-\frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{b^2}$
 или $\frac{r^2u^2 - q^2u^2 - \frac{g^2u^2}{b^2}}{r^2}$ превращаются въ $\frac{r^2u^2}{r^2}$. .

— $\frac{g^2 u^2}{b^2}$, а два члена $\frac{2c q^2 u}{r^2} - 2cu$ или $\frac{2c q^2 u - 2cr^2 u}{r^2}$ въ $-\frac{2cr^2 u}{r^2}$; равноѣрно два члена — $\frac{c^2 q^2}{r^2} + c^2$ превращаются въ $\frac{c^2 p^2}{r^2}$, попому что $r^2 - q^2 = p^2$. Уравненіе перемѣняется послѣ сего въ $y^2 + \frac{c^2 p^2}{r^2} - \frac{2cr^2 u}{r^2} + \frac{p^2 u^2}{r^2} - \frac{g^2 u^2}{b^2} = 0$, или по уничтоженіи знаменателей (сдѣлавъ припомъ для легости выкладки $p^2 b^2 - r^2 g^2 = r^2 k k$) вывожу $r^2 b^2 y^2 + c^2 b^2 p^2 - 2cb^2 p^2 u + r^2 k^2 u^2 = 0$.

Уничтожаю коэффициентъ въ u^2 , и получаю $u^2 - \frac{2cb^2 p^2}{r^2 k^2} u + \frac{b^2}{k^2} y^2 + \frac{c^2 b^2 p^2}{r^2 k^2} = 0$; дѣлаю $u - \frac{cb^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{cb^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$ вводя неизвѣстное n , попому что въ начальномъ уравненіи произведенія u не находилось (315). Тогда поступая по изъясненнымъ выше правиламъ и сдѣлавъ надлежащую членамъ вставку, вывожу $\frac{c^2 b^4 p^4 x^2}{r^4 k^4 n^2} - \frac{c^2 b^4 p^4}{r^4 k^4} + \frac{b^2}{k^2} y^2 + \frac{c^2 b^2 p^2}{r^2 k^2} = 0$, или уничтоживъ общаго фактора $\frac{b^2}{k^2}$ и поставивъ y^2 особо въ члѣнѣ уравненія, получаю $y^2 = -\frac{c^2 b^2 p^4 x^2}{r^4 k^4 n^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2} + \frac{c^2 b^2 p^4}{r^4 k^2}$, или представивъ умноженіе на x^2 въ показаніи $y^2 = -\frac{c^2 b^2 p^4}{r^4 k^2 n^2} \left(x^2 + \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 b^2} - n \right)$. Поелику дѣло идетъ о гиперболѣ, то замѣшимъ, что количество $r^2 k^2$, представляя поже самое, что $p^2 b^2 - r^2 g^2$, естъ отрицательное; ибо по сдѣланному выше заключенію $\frac{4r^2 b^2 g^2 - 4p^2 b^4}{r^2}$ или $\frac{4b^2}{r^2} (r^2 g^2 - p^2 b^2)$ должно изображать положительное количество, когда кривая линия

относится къ гиперболѣ. Слѣд. должно сдѣлать k^2 отрицательнымъ и вставить въ уравненіи величину его, гдѣ нужда того потребуетъ, $r^2g^2 - p^2b^2$ вмѣсто $p^2b^2 - r^2g^2$; и такъ уравненіе превращается въ $y^2 = \frac{c^2b^2p^4}{r^4k^2n^2} \left(x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2b^2} - m \right)$. Сравнивъ его съ $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(x^2 - \frac{1}{4}aa \right)$, получимъ для опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2b^2p^4}{r^4k^2n^2}$ и $\frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2b^2} + m$, откуда весьма легко вывести можно величины a и b , то есть, величины сопряженныхъ діаметровъ, которые, какъ мы увидимъ ниже, будутъ служить осями гиперболы.

Опредѣлимъ направленіе сопряженныхъ діаметровъ. Въ сходствѣнности сказаннаго (317) сочиняю два уравненія $z + \frac{cq}{r} - \frac{qy}{r} = y$, и $x = \frac{cb^2p^2}{r^2k^2} = \frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$; а какъ замѣтили мы, что k^2 должно быть отрицательнымъ для гиперболы, то надлежитъ перемѣнить послѣднее въ $x + \frac{cb^2p^2}{r^2k^2} = \frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$; мы не перемѣняемъ знака въ членѣ, заключающемъ въ себѣ x , хотя k^2 въ ономъ также находится, для того, что n можно принимать произвольно положительнымъ и отрицательнымъ. И такъ должно, продолжая поступать по предписанію того же параграфа, проведши изъ точки А параллельно съ РМ линію АВ $= \frac{cq}{r}$, и продолживъ чрезъ точку В линію ВІ параллельно съ АЗ, взявъ произвольной величины ВК и проведши КІ параллельную съ РМ и такую, чтобъ ВК : КІ $= r : q$; послѣ чего проведу чрезъ точки В и І линію ІВQ, пересѣкающую РМ въ Q, и получу въ линіяхъ QМ величины y . Ибо QМ $=$ РМ — PQ $=$ РМ — QІ $+ PI = z - QІ + \frac{cq}{r}$; припомъ же въ подобныхъ треугольникахъ ВКІ и ВQІ можно послать ВК : КІ

$$= BI \text{ или } AP : QI, \text{ то есть, } r : q = u : QI = \frac{qu}{r};$$

$$\text{слѣд. } QM = r - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y.$$

Можно короче сдѣлать эту конструкцію, представивши изъ точки F перпендикуляръ FB къ AT; ибо уголъ FАВ будетъ равенъ углу АРМ, и слѣд. въ прямоугольномъ треугольникѣ АВF произойдетъ такая пропорція $r : q = c : AB = \frac{qc}{r}$; а какъ QM параллельна съ АВ, то у должны быть перпендикулярны къ ВQ, и слѣд. ВQ показываетъ направленіе одной изъ осей, изъ которыхъ другая должна быть параллельна съ QM.

Теперь остается опредѣлить центръ. Вспомогательное уравненіе $u + \frac{cb^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{cb^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$ показываетъ, что должно взять съ противной стороны u количество . . .

$AG = \frac{cb^2 p^2}{r^2 k^2}$, и провести GC параллельно съ РМ или перпендикулярно къ ВQ; сія линия GC представитъ точку С за начало x , и слѣд. за центръ гиперболы. Въ самомъ дѣлѣ количества x должно считатьъ на CQ, потому что у ведутъ свой счетъ отъ той же линии; припомъ же уравненіе $u + \frac{cb^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{cb^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$, или

$AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, или $GP = \frac{AG \times x}{n}$ изображаетъ, что линіи x получаютъ начало свое въ тоже самое время, какъ и линіи GP; слѣд. линіи x должны выходить изъ точки С, и состоятъ изъ CQ; слѣд. точка С представляетъ центръ.

При сочиненіи эллипсиса должно поступать такимъ же образомъ.

Что касается до параболы, то въ ней, какъ мы упомянули уже выше, gr должно быть равно ph ; слѣд. уравненіе, выведенное въ y и u безъ второго члена по

буквъ r , превратится, когда поставишь въ немъ за $r^2 = q^2$ величину P^2 , а за g^2 въ количествѣ k^2 величину $\frac{pb}{r}$, взятую изъ $rg = pb$, превратится, говорю, въ $y^2 + \frac{c^2 p^2}{r^2} - \frac{2cr^2 u}{r^2} = 0$, или въ $y^2 = \frac{2cr^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2}$. И такъ чѣмъ предсавишь это уравненіе

въ видѣ параболическаго, должно сдѣлать въ сходственности (321) $\frac{2cr^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2} = nx$; послѣ чего произойдетъ $yu = nx$. Ссчинивъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, уравненіе $x + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, сдѣлай попомъ конспрукцію для уравненія $\frac{2cr^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2}$

$= nx$ по предписанному (321) правилу; именно освободишь u отъ коэффициента и выведишь $u = \frac{1}{2}c = \frac{r^2 x}{2cr^2}$, возьми на АР (фиг. 50) часть $AG = \frac{1}{2}c$ и про-

веди GS параллельно съ PM , точка S будетъ началомъ количествъ x , представляющихъ линіи CQ ; такимъ образомъ CQ покажетъ направленіе діаметра; верхъ сего діаметра будетъ находиться въ C , а на-
рмъ rs его будетъ n , конорой опредѣлишь слѣдующимъ образомъ: поелику $AG = \frac{1}{2}c$, то $GP = AP$

$- AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 nx}{2cr^2} = \frac{r^2 n}{2cr^2} \times CQ$; слѣд. . .

$u = \frac{2cr^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$; припомъ же по причинѣ параллель-

ныхъ линій rq , CG , AB выходишь $CQ : GP = CF : GF = BF : AF$, то есть, $CQ : GP = BF : c$; слѣд.

$GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; вставивъ величину сію за GP въ величинѣ

u , получишь $u = \frac{2c^2 p^2}{r^2 \times BF}$ извѣстное количество, по-

тому что c , p , r даны, а BF найдена по конспрук-

ціи. Можно величину сію предсавишь въ просѣи-

шемъ видѣ иначе такимъ образомъ: замѣшивъ, что въ прямоутомъ треугольникѣ ABF , $r : p = AF :$

$$BF = c : BF, \text{ получишь } BF = \frac{cp}{r}, \text{ и слѣд. } n = \frac{2(BF)^2}{BF} = 2BF.$$

Примѣненіе тѣхъ же правилъ къ нѣкоторымъ неопредѣленнымъ вопросамъ.

332. По разрѣшеніи втораго неопредѣленного вопроса, предложеннаго (329), вывели мы послѣ (330) рѣшеніе для другаго опредѣленнаго. Мы подразумѣвали скрытно въ семъ послѣднемъ два неопредѣленные вопроса одинакаго свойства съ первымъ. Перевѣченіе двухъ кривыхъ линей или двухъ круговъ, посредствомъ коннорыхъ выполнили требованія обоихъ частныхъ вопросовъ, послужило рѣшеніемъ опредѣленному. Еслили конечное или заключительное уравненіе, изображающее условія какого нибудь вопроса, превосходитъ вѣпорую степень, то должно при рѣшеніи его поступать подобнымъ образомъ. Иногда вмѣсто одного должно употреблять два неизвѣстныхъ, и стараться выводить по условіямъ вопроса два уравненія, изъ копорыхъ каждое, будучи сочинено порознь, представитъ кривую линию въ силу требованія; еслили задача возможная, то обѣ кривыя линей пересѣкутся въ одной, или во многихъ точкахъ, глядя по тому, изъ сколькихъ она рѣшеній состоятъ можеть, или сколько она можеть заключать случаевъ, зависящихъ отъ однихъ и тѣхъ же данныхъ количествъ и одинакихъ разсужденій. Сіи пересѣченія выводятъ разныя рѣшенія для задачи.

И такъ до тѣхъ поръ, пока два уравненія съ двумя неопредѣленными не будутъ превосходить вѣпорой степени, рѣшеніе ихъ будетъ состоять не болѣе, какъ изъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій. Но еслили напротивъ того въ этихъ же случаяхъ будетъ употреблено одно неизвѣстное, или еслили посредствомъ двухъ найденныхъ уравненій исключится одно изъ неизвѣстныхъ, то уравненіе взойдетъ до третьей степени и до четвертой. Еслили одно изъ уравненій или оба вмѣстѣ превосходятъ вѣпорую степе-

пень, то рѣшеніе въ такомъ случаѣ зависить отъ пересѣченія такихъ кривыхъ линий, кои выше коническихъ сѣченій.

Посудимъ о нѣкоторыхъ вопросахъ, для которыхъ выходятъ уравненія не выше четвертой степени.

333. Предложимъ въпервыхъ: *найти двѣ среднія пропорціональныя линии между данными двумя a и b ?*

Назвавъ двѣ среднія пропорціональныя линии t и u , выложу прогрессію $\div a : t : u : b$, изъ которой получаю двѣ слѣдующія пропорціи $a : t = t : u$, и $t : u = u : b$, и слѣд. оба сїи уравненія $at = t^2$ и $bu = u^2$ будутъ относитьъ прямо къ параболѣ. Почему еслили проведены будутъ двѣ неопредѣленной величины линии AZ , AH , (фиг. 51), соснавлиющія между собою всякой уголъ (для легкости можно предположить его прямымъ), и когда на одной изъ нихъ AZ , какъ на діаметрѣ u , изъ точки A , какъ изъ верху сего діаметра, начертится (302) парабола, которой параметръ діаметра AZ будетъ равенъ a , а уголъ координатъ HAZ , то такая парабола разрѣшитъ уравненіе $at = t^2$; линии AP будутъ представлять въ ней u , а линии PM , t . Равномѣрно еслили на AH , какъ на діаметрѣ и изъ точки A , какъ изъ верху, начертится парабола, ксей параметръ діаметра AH будетъ состоятъ изъ b , а уголъ координатъ изъ HAZ , то вторая сїя парабола будетъ принадлежать уравненію $bu = u^2$; линии AP' изобразятъ t , а линии $P'M'$ u . Но дабы вопросъ былъ рѣшенъ совершенно, то должно, чтобъ оба уравненія $at = t^2$ и $bu = u^2$ имѣли силу вдругъ, то есть, чтобъ величины u и t были какъ въ томъ, такъ и другомъ одинаковы; но эшо не въ иномъ мѣстѣ случиться можетъ, какъ въ точкѣ M , гдѣ пересѣкаются обѣ параболы; ибо еслили, считая величины u на AZ , а t на AH , или параллельно съ AH , проведемъ MP и MP параллельно съ AH и AZ , то величина MP количества u въ параболѣ AMM' будетъ одинакова съ величиною AP тогожъ количества t въ параболѣ AMM . Равнымъ образомъ величина AP количества t въ параболѣ AMM' будетъ одинакова съ величиною PM или t въ параболѣ

АММ. И такъ линей АР и РМ будутъ представ-
лять величины u и z .

334. Хотя сочиняя порознь сыскиваемые урав-
ненія, доходимъ всегда до общаго ршенія: однако
не рѣдко случается, что сдѣлавъ уравненіямъ нѣ-
которое приготовленіе, можно произвести конструк-
цію гораздо легче. На примѣрѣ еслили сложимъ два
уравненія $ai = z^2$ и $bi = u^2$, то въ суммѣ ихъ $ai +$
 $bi = u^2 + z^2$ получимъ такое, которое будетъ при-
надлежать кругу, еслили предположимъ, что линей
 u и z перпендикулярны между собою. Хотя чернежъ
параболы не труденъ, но круга еще легче; слѣд. въ
наспорящемъ случаѣ легче сдѣлать конструкцію для
последняго уравненія, а именно: сочинивъ одно $ai =$
 z^2 , какъ показано было выше, сочини попомъ круга
все уравненіе $ai + bi = u^2 + z^2$, перемѣнивъ его въ
слѣдующее другое $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$ чрезъ уни-
чтоженіе впорыхъ членовъ по буквѣ z и по буквѣ u ,
то есть, сдѣлавъ $z - \frac{1}{2}b = y$, и $u - \frac{1}{2}a = x$. То-
гда положивъ $AB = \frac{1}{2}b$, и продолживъ ВQ параллель-
но съ АР, получишь въ линияхъ QM величины y . На-
последокъ положивъ $AO = \frac{1}{2}a$ и протянувъ ОС па-
раллельно съ АХ, будешь имѣть въ линияхъ СQ
величины x ; слѣд. изъ точки С какъ изъ центра и
радіусовъ равнымъ $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$, то есть, рав-
нымъ АС опиши кругъ, который пересѣкнетъ параболу
АМ въ точкѣ М, предсавивъ МР и АР за величи-
ны z и u .

335. Можно дѣлать сѣи конструкціи разнымъ
образомъ, на примѣрѣ, сложивъ одно изъ означен-
ныхъ уравненій съ другимъ, умноженнымъ на про-
извольное количество $\frac{1}{n}$ положительное или отрица-
тельное, получишь $ai + \frac{1}{n} bi = z^2 + \frac{1}{n} u^2$ такое
уравненіе, которое можетъ принадлежать какъ эл-
липсису, такъ и гиперболѣ, глядя по тому, какое ко-
личество будетъ взято за $\frac{1}{n}$, такъ что посред-
ствомъ той или другой изъ сихъ кривыхъ линей
можно сдѣлать такую же конструкцію, какую сдѣ-

дали выше посредствомъ круга. Можно также сочинить сіе уравненіе посредствомъ какой нибудь одной изъ нихъ и посредствомъ круга, давъ приличныя величины количеству $\frac{l}{u}$, и которыя послѣ не трудно опредѣлить по предписанному (319 и слѣд.).

336. Предложимъ въпорымъ вопросомъ, раздѣлитъ данной уголъ или данную дугу на три равныя части?

Пусть дѣлимая дуга будетъ EO (фиг. 52), а A центръ ея; допустивъ, что EM представляетъ нрѣзъ EO , проведемъ радиусы EA , MA , и опустимъ перпендикуляры MP , OR . Линія OR будучи синусъ, а AR косинусъ данной дуги EO , должны быть известны; представимъ ихъ чрезъ d и c , радиусъ AE чрезъ r , наконедъ неизвѣстныя количества AP и PM чрезъ u и t .

По предположеніи сего, въ прямоугольномъ треугольникѣ APM получаемъ $u^2 + t^2 = rr$, и въ подобныхъ треугольникахъ APM , ARS вывожу $AP : PM = AR : RS$, то есть, $u : t = c : RS = \frac{cr}{u}$. Но если перпендикуляръ MP будетъ продолженъ до шѣхъ поръ, пока пересѣчетъ окружность въ точкѣ V , то дуга MV сдѣлается равна дугѣ MO по той причинѣ, что каждая изъ нихъ вдвое больше ME ; слѣд. уголъ $OMS = AMP = ASR = OSM$ (по причинѣ параллельныхъ линій). И такъ треугольникъ SOM есть равнобедренной, и слѣд. $OS = OM = MV = 2t$; а поелику $OR = OS + SR$, то $d = 2t + \frac{cr}{u}$, или $2tu + cr = du$, или $tu + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}du$.

И такъ два уравненія, которыя должно сочинить, суть $u^2 + t^2 = r^2$ или $t^2 = r^2 - u^2$, и $tu + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}du$. Первое само по себѣ сочинено, потому что относится къ кругу $ЕМО$.

Что касается до втораго, то оно принадлежитъ гиперболѣ (326); а какъ недостаетъ въ немъ двухъ

квадратовъ, то должно въ сходственностъ упомяну-
таго параграфа поставить въ члены s и v одной
части, опъ чего произойдетъ $u - \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2} s$, или
 $\frac{1}{2} du - u = \frac{1}{2} s$; сдѣлай $\frac{1}{2} d - t = y$, и вставивъ вмѣ-
сто t величину его, получишь $uy = -\frac{1}{2} sy + \frac{1}{4} cd$, или
 $uy + \frac{1}{2} sy = \frac{1}{4} cd$. Напоследокъ сдѣлавъ $u + \frac{1}{2} s = x$,
получишь $xu = \frac{1}{4} cd$ уравненіе, принадлежащее гипер-
болѣ между ея асимптодами, которыя опредѣли слѣ-
дующимъ образомъ.

Уравненіе $\frac{1}{2} d - t = y$ показываетъ, что естѣ-
ли изъ точки А какъ начала u и t проведешь АВ па-
раллельную съ РМ и равную $\frac{1}{2} d$, потомъ изъ В ли-
нею QBC параллельно съ АР, то получишь въ линее-
хъ QM (ведя для нихъ счетъ пропивно РМ) величи-
ны y ; ибо $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2} d - t = y$; слѣд. CQ показываетъ направленіе одной изъ
асимптовъ.

Естѣли по второму уравненію $u + \frac{1}{2} s = x$ продол-
жишь АР къ сторонѣ G количества $AG = \frac{1}{2} s = \frac{1}{2} AR$,
то получишь въ линеехъ GR или равныхъ имъ CQ (по
проведеніи GC параллельной съ РМ) величины x ;
слѣд. точка С представляетъ центръ, а линии CQ
и CG асимптовы. И такъ опиши по предписанному
образу (289) гиперболу между сими асимптодами;
она пройдетъ чрезъ точку А, какъ по изображаетъ
само уравненіе $xu = \frac{1}{4} cd = \frac{1}{2} s \times \frac{1}{2} d = AG \times AB = CB \times AB$, и пересѣчетъ кругъ въ искомой точ-
кѣ М.

Естѣли дуга ЕО будетъ больше 90° , то коси-
нусъ ея AR, упадая въ пропивную сторону, сдѣ-
ляется отрицательнымъ; слѣд. должно въ такомъ
случаѣ предположить количество s отрицательнымъ.
Когда же дуга ЕО будетъ больше 180° , а меньше 270° ,
какъ то видѣшь можно въ дугѣ ЕО Е'О', то синусъ
и косинусъ ея сдѣлаются отрицательными; слѣд.
въ найденныхъ выше уравненіяхъ должно перемѣ-
нить знаки у обоихъ количествъ s и d .

Естѣли продолжишь GC на количество CG' =
CG, и СВ на количество СВ' = СВ, а потомъ про-
ведши В'А' и G'А' параллельно съ CG' и СВ', опи-

шенъ между линиями CG' и CB' (неопредѣленно продолженными), какъ между асимптодами гиперболу проходящую чрезъ точку A' , то сія гипербола пересѣченъ кругъ въ двухъ точкахъ A' и M' также, какъ первая пересѣкла его въ M и M'' . Но изъ четырехъ сихъ точекъ при только замѣчательны, именно, точки M , M' и M'' . Первая изъ нихъ представляемъ въ дугѣ EM прелъ данной EO , вторая M' въ дугѣ $E'M'$ прелъ $E'O$ дополненія EO ; наконецъ прелъ точка M'' изображаетъ въ дугѣ $E'M'$ прелъ EO $E'O'$, то есть, прелъ дуги OE , увеличенной половиною окружности.

Въ самомъ дѣлѣ дуга $E'O$ имѣетъ синусомъ и косинусомъ тѣ же линіи RO и AR , какія дуга EO , съ тою только разницею, что по принятіи AR за косинусъ дуги $E'O$ больше 90 градусовъ, онъ становится отрицательнымъ; и такъ для ршенія сего вѣроятнаго случая должно предположить въ предыдущемъ ршеніи количество с отрицательнымъ; но такое предположеніе перемѣняетъ только второе уравненіе, то есть, $xy = \frac{1}{2}cd$ въ $xy = -\frac{1}{2}cd$ такое, которое принадлежитъ гиперболѣ $A'M'$, и которое показываетъ, что ршеніе сего случая зависитъ отъ пересѣченія M' описанной гиперболы съ кругомъ. (Мы увидимъ топчасть, для чего оно не зависитъ отъ A'). Слѣд. $R'M'$ будетъ синусъ искомой дуги въ семъ вѣроятнѣмъ случаѣ; слѣд. прелъ дуги $E'O$ должна представлять $E'M'$. —

Что касается до прелънаго ршенія, то увеличивъ дугу EO 180 градусами, получишь за синусъ и косинусъ сей увеличенной дуги EO $E'O'$ линіи $R'O'$, AR' , которыя совершенно равны предыдущимъ RO , AR , и разныя въ знамѣ только, что упадающъ съ противныхъ сторонъ, и становятся по той причинѣ отрицательными; слѣд. для ршенія сего случая должно предположить с и d отрицательными числами. Но такое предположеніе не производитъ никакой перемѣны въ уравненіи, въ которомъ заключающаюся оныя количества, то есть, въ уравненіи $xy = \frac{1}{2}cd$; почему прежняя гипербола должна ршиться своимъ пересѣченіемъ M'' сей прелъ случай; линія $R'M''$ представитъ синусъ искомой дуги въ прелъ-

емъ случаѣ; сія дуга будетъ $E'M''$, то есть, $E'M''$ покажетъ ширину дуги $EOE'O'$.

Посредствомъ той же конструкии, которая служитъ къ опредѣленію широты данной дуги A , опредѣлится широта дуги $180^\circ - A$ и широта дуги $180^\circ + A$. Можно сдѣлать здѣсь примѣчаніе тому, что сказали мы (335) о разныхъ перемѣнахъ конструкии въ киническихъ свѣдѣніяхъ, выводя ихъ изъ произвольнаго совокупленія двухъ уравненій въ u и t .

Что принадлежитъ до четвертаго пересѣченія, именно, до точки A' ; хотя точка сія нах. дится на окружности, однако она не представляетъ никакого новаго рѣшенія, потому что опредѣляющія дѣйствія независимы отъ уравненій, кои вывелись рѣшеніе. Для опредѣленія же ея сдѣлаемъ $B'A' = AB$ и $B'C = CB$; послѣ чего получишь $AK' = AR$ и $K'A' = RO$.

337. Если изъ уравненія $2tu + ct = du$, найденнаго выше, извлечешь величину t и поставишь ее въ уравненіи $u^2 + t^2 = r^2$, которое выведено было въ томъ же мѣстѣ, то получишь, по вставкѣ за $c^2 + d^2$ величины его r^2 , по переѣзановѣ членовъ и по приведеніи $\dots 4u^4 + 4cu^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, или $4u^3(u+c) - 3r^2u(u+c) - cr^2 \times (u+c) = 0$; изъ сего уравненія, по раздѣленіи его на $u+c$, выходишь $4u^3 - 3r^2u - cr = 0$ такое, которое должно заключать въ себѣ рѣшеніе прѣхъ сбывающихся случаевъ; слѣд. оно должно имѣть три корня; а какъ сдѣланная конструкиа показала намъ, что u соотнош. изъ прѣхъ величинъ, именно, изъ AP , AP' и AP'' (двѣ послѣднія упадающія съ противоположн. спорами первой), то должно заключить, что корнями сего уравненія будутъ служить величины u , изъ коихъ двѣ отрицательныя; именно, $u = -AP'$, $u = -AP''$, а третія положительная, $u = AP$.

338. Уравненіе $4u^3 - 3r^2u - cr = 0$, или $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr = 0$ относится къ неизмѣнному или неслучайному случаю: но велику корнями его должны быть косинусы $\frac{1}{2}EO$, $\frac{1}{2}(180^\circ - E)$, $\frac{1}{2}(180^\circ + EO)$, то можно посредствомъ таблицы синусовъ най-

нии при корня въ уравненіи третьей степени чрезъ
двухъначное и не въ продолжительное время имѣю-
щее совершиться приближеніе. Вотъ поному способъ:
представимъ всякое уравненіе третьей степени въ
неприводимомъ случаѣ чрезъ $u^3 - pu + q = 0$; по-
слѣ чего сравнивъ съ нимъ уравненіе $u^3 - \frac{3}{4}r^2u -$
 $\frac{1}{4}cr^2 = 0$, получимъ $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, и $-\frac{cr^2}{4} = q$;

по симъ послѣднимъ уравненіямъ заключаю $r =$
 $\sqrt[3]{\frac{4}{3}p}$, и $c = -\frac{3q}{p}$. Представимъ чрезъ R раді-

усъ таблицъ; тогда получимъ косинусъ дуги EO,
такой, какой находится въ таблицахъ, чрезъ вычи-
сленіе четвертаго члена въ слѣдующей пропорціи $r : c$

или $\sqrt[3]{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} = R : \frac{3qR}{p\sqrt[3]{\frac{4}{3}p}}$; сыскавъ въ таб-

лицахъ сей четвертой членъ, опредѣли поному синусъ
дополненія дуги EO; почему сложивъ найденное число
градусовъ съ 90° , или напрошивъ исключивъ поже
число изъ 90° , глася поному, какую величину пред-
ставляеиъ количесиво q, положивъ величину или оп-
риданельную, получишь дугу EO, которая, положимъ,
равна A; сыщи въ тѣхъ же таблицахъ косинусы
трехъ дугъ, $\frac{A}{3}$, $\frac{180^\circ - A}{3}$ и $\frac{180^\circ + A}{3}$; и наконецъ

для приведенія ихъ въ радіусу r, умножь каждой
на $\frac{r}{R}$, то есть, на $\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}p}}{R}$; ибо для приведенія на

примѣръ хос. $\frac{A}{3}$, взятаго изъ таблицъ въ косинусъ

по радіусу r, должно сдѣлать такую посылку, R :
хос. $\frac{A}{3} = r$ къ косинусу той же дуги въ кругѣ, ко-

ему служилъ радіусомъ r, то есть, къ AR или u; по-
чему при величины u будутъ слѣдующія; $u = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}p}}{R}$

хос. $\frac{A}{3}$, и $u = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}p}}{R}$ хос. $\frac{180^\circ - A}{3}$; и $u = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}p}}{R}$ хос.

$\frac{180^\circ + A}{3}$, изъ которыхъ шѣ, коихъ дуги будутъ

превосходящій 90° не далѣе однакожъ 270° , должно поспавлять съ знакомъ —. Можно совершить иѣ же дѣйствія легче посредствомъ логарифмовъ.

339. Предложимъ теперь такой вопросъ, который былъ бы всеобщее разрѣшеннаго (211): изъ точки D (фиг. 53), коей положеніе извѣстно въ разсужденіи двухъ линей AR, AP, составляющихъ между собою извѣстной уголъ, провести линію DP такъ, чтобъ заключающаяся между тѣми линіями часть RP была равна данной линіи?

Проведи изъ точки D линію DS перпендикулярно къ продолженію AP, и линію DO параллельно съ AR; поставь также изъ точки R линію RN, перпендикулярно къ AP. Линіи DO, DS, OS и AO должны быть извѣстны, какъ по данному положенію точки D, такъ и по тому, что уголъ RAP или его дополненіе RAN = DOS предпологаеся извѣстнымъ. Представимъ DO чрезъ r , DS чрезъ p , OS чрезъ q , AO чрезъ d , а извѣстную линію, коюрой RP должна быть равна чрезъ s . Наконецъ неизвѣстныя AP и AR назовемъ u и t .

Въ подобныхъ треугольникахъ DSO, RNA получимъ $DO : DS = AR : RN$, и $DO : OS = AR : AN$, то есть, $r : p = t : RN = \frac{pt}{r}$, и $r : q = t : AN = \frac{qt}{r}$; слѣд. $NP = \frac{qt}{r} + u$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ RNP будемъ имѣть $(RN)^2 + (NP)^2 = (RP)^2$, то есть, $\frac{qqt}{rr} + \frac{2qut}{r} + uu + \frac{p^2t^2}{rr} = ss$, или (по причинѣ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ DSO, $p^2 + q^2 = r^2$) получимъ $t^2 + \frac{2qut}{r} + u^2 = ss$.

Но какъ находишься два неизвѣстныхъ, то должно вывести два уравненія; въ подобныхъ треугольникахъ DOP, RAP выходишь $DO : RA = OP : AP$, то есть, $r : t = d + u : u$, и слѣд. $tu = d + ut$. Возмъ иѣ уравненія, которыя слѣдуетъ сочинить для рѣшенія даннаго вопроса.

Первое принадлежитъ (319) эллипсису, а второе гиперболѣ.

Для сочиненія первой экваціи дѣлаю $r + \frac{qu}{r} = y$, и поспуая въ сходственность предыдущихъ примѣровъ, получаю $yy - \frac{qqii}{rr} + ii = cc$, или по причинѣ, что $-\frac{qqii}{rr} + ii = \left(\frac{rr - qq}{rr}\right) ii = \frac{ppii}{rr}$, заключаю, что $yy + \frac{ppii}{rr} = cc$. Дѣлаю $u = \frac{lx}{n}$ (324), и получаю $yy + \frac{ppllxx}{rrnn} = cc$, или (по причинѣ, что

мы предположили произвольную величину для какого нибудь изъ неопредѣленныхъ l и n) сдѣлавъ $l = r$, вывожу $yy = cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn} \left(\frac{ccnn}{pp} - xx\right)$.

Сравнивъ сіе уравненіе съ $yy = \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{2}aa - xx\right)$, найдемъ, что два сопряженные діаметра a и b будутъ $a = \frac{2cn}{p}$, и $b = 2c$. Опредѣлимъ положеніе ихъ и

величину n ; а дабы узнать лучше употребленіе сей конспрукціи, то давъ попеременно линеймъ n или AP разныя величины, проводи параллельно къ AR линіи PM , равныя сопряженнымъ величинамъ r ; отъ чего произойдетъ кривая линія, относящаяся къ настоящему уравненію. По совершеніи сего возьми на AP линію AK произвольной величины, и проводи KL параллельно съ PM такую, которая бы содержалась къ линіи $AK = q : r$; тогда по причинѣ подобныхъ треугольниковъ AKL , APQ , получимъ $QM =$

$PM + PQ = r + \frac{qu}{r}$, и слѣд. $QM = y$; почему линія AQ будетъ представлять направленіе одного изъ діаметровъ, и линіи x должны имѣть свой счетъ на немъ; но уравненіе $u = \frac{l}{n} x = \frac{r}{n} x$ изображаетъ, что величины x рождаются въ одно время съ u , слѣд.

x состоятъ изъ AQ . По допущеніи сего, уравненіе $x = \frac{rx}{n}$ превращается въ $AP = \frac{r \times AQ}{n}$, изъ котораго выходимъ $n = \frac{r \times AQ}{AP}$, или $AP : AQ =$

$r : n$, то есть, $AK : AL = r : n$; а какъ количество AK принимается произвольной величины, то можно положить его равнымъ r ; послѣ чего получимъ $n = AL$.

Теперь спомнишь только сочинишь такой эллипсисъ (252), коегобы сопряженные діаметры сдѣлали между собою уголъ равный AQM ; шонъ изъ діаметровъ, которой имѣетъ направленіемъ AQ , долженъ $= \frac{2cp}{p}$, а другой имѣющій направленіемъ AR долженъ $= 2c$. Сей эллипсисъ рѣшимъ первое уравненіе.

Остаётся еще намъ сочинить второе уравненіе $ru = at + ut$, или $ru - ut = at$. И такъ поступая по предыдущимъ правиламъ, сдѣлай $r - t = y'$, поимъ $u + d = x'$; опъ чего уравненіе превращается въ $x'y' = rd$ такое, которое принадлежитъ гиперболѣ между ся асимптотами. Почему въ силу уравненія $r - t = y'$, положи на AR количествъ $AT = r = OD$. А это сдѣлай протянувъ изъ точки B линію DTV параллельно съ AP ; тогда линіи VM , для которыхъ долженъ вѣсти счепъ опъ V къ споронъ M , то есть, противно либеймъ PM , будутъ представлять y' ; ибо $VM = PV - PM = r - t$; сдѣл. $VM = y'$. Нанослѣдокъ въ силу уравненія $u + d = x'$ сдѣлай $OA = d$, протянувъ изъ точки D линію DO параллельно съ AT ; линіи DV будутъ представлять въ такомъ случаѣ x' , потому что $DV = OP = OA + AP = d + u$. Почему начерченная (289) между линіями DO и DV , какъ асимптотами, гиперболѣ должна пройти чрезъ точку A , потому что $x'y' = rd = AO \times AT$; сія гиперболѣ пересѣчетъ эллипсисъ въ двухъ точкахъ M и M' ; проводи изъ сихъ точекъ линіи MR и $M'R'$ параллельно съ AP , чрезъ то получишь новыя двѣ R и R' ; проводи изъ D чрезъ R и R' линіи DRP и $DP'R'$, части PR и $P'R'$ сихъ линіи, заключающіяся въ равныхъ углахъ RAP , $R'AP'$ будутъ равны данной линіи c .

Естьли по продолженіи асимптоа начерпншь продолженіюющую гиперболу $M''A'M'''$ (Фиг. 54), то она пересѣченіемъ своимъ опредѣлитъ двѣ новыя точки M'' и M''' , изъ которыхъ проіянутъ параллели съ AP , долучивъ двѣ точки R'' и R''' такія, которыя сходивуюнъ съ прежними R и R' ; еслии проведенъ ошъ нхъ чрезъ точку D двѣ линіи $R''P''$ и $R'''P'''$, то линіи сіи, заключающіяся въ углѣ TAS , будутъ также равны данной c . Таковъ вообще способъ для рѣшенія опредѣленійхъ вопросовъ, изъ коихъ выходящае уравненіе не выше четвертой степени.

340. Тѣмъ же способомъ, какимъ рѣшишь вопросъ, не употребляя двухъ неизвѣстныхъ, можешъ рѣшишь его съ новымъ неизвѣстнымъ. Пущь для примѣру будетъ данъ слѣдующій: по известнымъ стрѣлкѣ CP (фиг. 55) сферическаго сегмента и толщинѣ другаго, который имѣетъ стрѣлкою остатокъ PM діаметра шара, опредѣлить сей діаметръ?

Положимъ, что r : c представляетъ содержаніе полуокружности къ окружности, а стрѣлку CP , а стрѣлку PM ; въ такомъ случаѣ количество $a + z$ будетъ равно діаметру, и толщина сегмента, имѣющаго стрѣлкою PM , изобразится чрезъ $\frac{c}{2r} \times \pi (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}z)$. А какъ толщина сія предполагается извѣстною, то представляю ее чрезъ $\frac{c}{2r} \times \frac{1}{2}aar$, (r будетъ количество извѣстное). Послѣ сего получаю $\frac{c}{2r} \pi (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}z) = \frac{c}{2r} \times \frac{1}{2}aar$, или $z^2 + 2az -aar = 0$.

Для конструкціи сего уравненія, полагаю $z^2 = au$, и по вставкѣ получаю $u + 2az - ar = 0$ уравненіе, принадлежащее гиперболѣ между ея асимптотами, которое сочинивъ вмѣстѣ съ параболическимъ $z^2 = au$, опредѣлю посредствомъ пересѣченія сихъ двухъ кривыхъ линій величину z .

К О Н Е Ц Ъ.



ТАБЛИЦА

Матери.

ОТДѢЛЕНИЕ ПЕРВОЕ.

О правилахъ исчисленія Алгебраическихъ количествъ. *Стр. 1.*

Что такое *Алгебра*.
Тамъ же.

О начальныхъ дѣйствіяхъ количествъ, разсматриваемыхъ вообще. *Стр. 3.*

О сложеніи и вычитаніи. *Стр. 4.*

Какъ представляются дѣйствія сіи въ показаніи. *Стр. 4 и 5.*

Что такое *коэффициентъ*. *Стр. 5.*

Что разумѣется подъ *членами* количествъ. *Стр. 7.*

Что такое значитъ *одночленное, двучленное и многочленное* количествъ. *Тамъ же.*

Знаки *положительныхъ и отрицательныхъ* количествъ. *Стр. 8.*

О умноженіи. *Стр. 8.*

Какъ представляется дѣйствіе сіе въ показаніи для одночленныхъ количествъ. *Стр. 9.*

Что такое значитъ *показатель*. *Стр. 10.*

Какъ представляется умноженіе многочленныхъ количествъ въ показаніи. *Стр. 17.*

О дѣленіи. *Стр. 18.*

Какъ представляется дѣйствіе сіе въ показаніи. *Стр. 19.*

Что значитъ *количество*, имѣющее *показателемъ нуль*. *Стр. 21.*

О способѣ находить для двухъ литеральныхъ количествъ общаго дѣлителя. *Стр. 28.*

О литеральныхъ дробяхъ. *Стр. 31.*

Объ уравненіяхъ. *Стр. 35.*

О знакѣ равенства и о частяхъ уравненія.

Стр. 36.

Что должно знать для рѣшенія Алгебраическихъ вопросовъ. *Стр.*

37.

О уравненіяхъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. *Стр.* 38.

Правило для переставки членовъ изъ одной части уравненія въ другую. *Стр.* 39.

Правило для уничтоженія въ неизвѣстномъ количествѣ коэффициента или множителя его. *Стр.* 41.

Правило для уничтоженія знаменателей. *Стр.* 43.

Приноровка предыдущихъ правилъ для рѣшенія нѣкоторыхъ простыхъ вопросовъ. *Стр.* 46.

Правила, какъ вывести изъ вопроса уравненія. *Тамъ же.*

О положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ, и о томъ, что онѣ значатъ; отъ *стр.* 57 до *стр.* 64.

Объ уравненіяхъ первой степени со многими неизвѣстными. *Стр.* 65.

Правило для исключенія неизвѣстныхъ. *Стр.* 66 и слѣд.

Другой способъ исключать неизвѣстныя. *Стр.* 73.

Приноровка предыдущихъ правилъ для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ, заключающихъ въ себѣ больше одного неизвѣстнаго. *Стр.* 76.

О томъ, въ какихъ случаяхъ вопросы оспаются неопредѣленными, и въ какихъ бываютъ они неизвѣстными. *Стр.* 83.

О неопредѣленныхъ задачахъ. *Стр.* 87.

Объ уравненіяхъ второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. *Стр.* 94.

Радикальной знакъ, и что онъ значить. *Стр.* 95.

Для чего уравненіе второй степени имѣетъ всегда два корня. *Стр.* 96.

Когда бываютъ оба сѣи корня умственными или невозможными. *Стр.* 97.

Нужныя приготовленія для рѣшенія уравненія

- второй степени. *Стр.* 98.
- Правило** для рѣшенія уравненія второй степени. *Стр.* 99.
- Приноровка** сихъ правилъ для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ. *Стр.* 102.
- О** составленіи степеней изъ одночленныхъ количествъ, о извлеченіи ихъ корней, и представленіи радикальныхъ знаковъ и показателей. *Стр.* 111.
- Правило** для возведенія одночленнаго количества въ пребую степень. *Стр.* 112.
- Правило** для извлеченія всякаго корня изъ одночленнаго количества. *Стр.* 114.
- Правило** для приведенія разныхъ радикальныхъ показателей къ одному. *Стр.* 121.
- Правило** для превращенія количества изъ числителя въ знаменателя, и обратно. *Стр.* 126.
- О** составленіи степеней изъ многочленныхъ количествъ, и о извлеченіи корней ихъ. *Стр.* 127.
- О** составленіи степеней изъ двучленныхъ количествъ; отъ *стр.* 127 до *стр.* 141.
- О** составленіи степеней изъ многочленныхъ количествъ. *Стр.* 142.
- О** извлеченіи корней изъ многочленныхъ количествъ. *Стр.* 142.
- О** способѣ подходить къ настоящимъ корнямъ несовершенныхъ степеней лигиперальныхъ количествъ. *Стр.* 149.
- Объ** уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными, превосходящихъ первую степень. *Стр.* 155.
- О** двучленныхъ уравненіяхъ. *Стр.* 159.
- Объ** уравненіяхъ, которыя рѣшаются на подобіе уравненій второй степени. *Стр.* 161.
- О** составленіи уравненій. *Стр.* 163.
- О** числѣ корней всякаго уравненія. *Тамъ же.*
- Объ** отношеніи, которое находилось между корнями уравненія и между коэффициентами разныхъ его членовъ. *Стр.* 169.

О перемѣнахъ , кото-
рымъ могутъ подле-
жать уравненія. *Стр.*
173.

Правило для уничтоже-
нія знаменателей въ
уравненіи безъ припи-
санія коэффиціента къ
первому члену. *Стр.*
173 и 174.

Правило для уничтоже-
нія втораго члена въ
уравненіи. *Стр.* 174.

Объобщеніе рѣшенія слож-
ныхъ или составныхъ
уравненій. *Стр.* 176.

Примѣненія предыдуща-
го способа для третьей
степени. *Стр.* 178.

Что такое значить не-
приводимой случай.
Стр. 182.

Примѣненіе для четвер-
той степени. *Стр.* 182.

О соизмѣримыхъ дѣли-
теляхъ уравненій. *Стр.*
184.

О способѣ подходить къ
настоящимъ корнямъ
сложныхъ уравненій
чрезъ приближеніе.
Стр. 189.

ВТОРОЕ ОТДѢЛЕНІЕ,

Въ коморомъ примѣняет-
ся Алгебра въ Ари-
метикѣ и Геометріи.
Стр. 193.

Какимъ образомъ Алгеб-
раическое выраженіе
всякаго свойства дово-
дитъ до рѣшенія столь-
кихъ вопросовъ , сколь-
ко въ томъ свойствѣ
заключается разныхъ
количествъ. *Стр.* 194.

Общія свойства Ариме-
тическихъ прогрессій.
Тамъ же.

О производствѣ степеней
членовъ всякой Ари-
метической прогрессіи.
Стр. 205.

Часть III.

Приоровка къ числу
ядеръ квадратуголь-
ной и продолговатой
кучи. *Стр.* 208 и 209.

О производствѣ нѣкото-
рыхъ другихъ рядовъ.
Стр. 211 и слѣд.

Приоровка къ числу
ядеръ треугольной ку-
чи. *Стр.* 214.

О свойствахъ и употребе-
нн Геометрическихъ
прогрессій. *Стр.* 215.

О Геометрической кон-
струкціи Алгебраиче-
скихъ количествъ.
Стр. 221.

О конструкціи раці-
ональныхъ количествъ

Ъ

одного просяженія. *Стр.* 224.

О конструкціи раціональных количествъ двухъ просяженій. *Стр.* 228.

О конструкціи раціональных количествъ трехъ просяженій. *Стр.* 228.

О конструкціи радикальных количествъ второю степені. *Стр.* 229 и слѣд.

Разныя Геометрическія вопросы и разсужденія какъ о способѣ выводить уравненіе, такъ и о различныхъ рѣшеніяхъ сихъ уравненій. *Стр.* 234. и слѣд.

Правило для выбора линии, которую нужно употреблять за неизвѣстное количество въ вопросѣ. *Стр.* 256.

Иныя примѣненія Алгебры къ разнымъ предметамъ. *Стр.* 269.

О кривыхъ линейкахъ вообще, и о коническихъ сѣченіяхъ въ особенності. *Стр.* 277.

О томъ, что изъ уравненій можно вывести для чертенія кривыхъ.

Объ эллипсисѣ. *Стр.* 287.

Разные способы чертить эту кривую линейю. *Стр.* 289.

Что такое оси, фокусы и всѣхъ осей. *Стр.* 291.

Что такое пара метръ. *Стр.* 292.

Сравненіе круга съ эллипсисомъ. *Стр.* 295.

Способъ проводить тангенсъ къ эллипсису. *Стр.* 296.

Опредѣленіе тангенса, суб-тангенса, суб-нормали и н-нормали. *Стр.* 297 и слѣд.

Что такое сопряженные діаметры въ эллипсисѣ, и свойства ординатъ ихъ. *Стр.* 303.

Свойства сопряженныхъ діаметровъ. *Стр.* 303 и слѣд.

Способъ опредѣлять оси по сопряженнымъ діаметрамъ и углу ихъ. *Стр.* 311.

О гиперболѣ. *Стр.* 312.

Разныя средства чертить эту кривую линейю. *Стр.* 314.

Что такое оси, фокусы и верхи сеей гиперболы. *Стр.* 315.

Правило для чертенія гиперболы.

Способъ проводить тангенсѣ къ гиперболѣ.

Стр. 319.

Опредѣленіе суб-тангенса, тангенса, суб-нормали и нормали. *Стр.* 320 и слѣд.

Объ *асимптотахъ*, что онѣ значатъ и какимъ образомъ опредѣляются. *Стр.* 323.

О сопряженныхъ діаметрахъ гиперболы. *Стр.* 329.

Свойства ихъ ордонатъ. *Стр.* 330 и слѣд.

Свойства сопряженныхъ діаметровъ. *Стр.* 333.

Способъ чертить гиперболу по извѣстнымъ сопряженнымъ діаметрамъ и углу ихъ. *Стр.* 334.

О гиперболѣ между ея асимптодами. *Стр.* 335.

Что значитъ степень гиперболы. *Стр.* 337.

Свойство линей проведенныхъ между асимптодами гиперболы и самою кривою линеєю. *Стр.* 337 и слѣд.

Способъ чертить гиперболу по извѣстнымъ асимптодамъ и данной точкѣ сей кривой линии. *Стр.* 340.

О параболѣ. *Стр.* 340.

Что такое ось, верхъ, фокусъ, линия направленія и параметръ параболы. *Стр.* 341 и слѣд.

Способы чертить сію кривую линею. *Стр.* 343.

Свойства ордонатъ ея къ осямъ. *Стр.* 344.

О тангенсѣ, суб-тангенсѣ и суб-нормалѣ параболы. *Стр.* 344 и слѣд.

О діаметрахъ параболы и ихъ параметрѣ. *Стр.* 346.

Свойства параболы относительно къ ея діаметрамъ. *Стр.* 347.

Способъ чертить параболу по извѣстнымъ діаметру и углу, которой заключается между имъ и тангенсомъ, проведеннымъ къ верху тогожъ діаметра. *Стр.* 348.

Рожденіе коническихъ сѣченій въ конусѣ. *Стр.* 349.

Разсужденія объ уравненіяхъ коническихъ сѣченій и объ отличительныхъ чертахъ сихъ уравненій. *Стр.* 351.

Способы представлять всякое уравненіе второй степени съ двумя

неопредѣленнымъ въ видѣ уравненій коническихъ сѣченій, если ли только первое будетъ изображать возможную вещь. *Стр.* 362.

Примѣненіе предыдущихъ правилъ для рѣ-

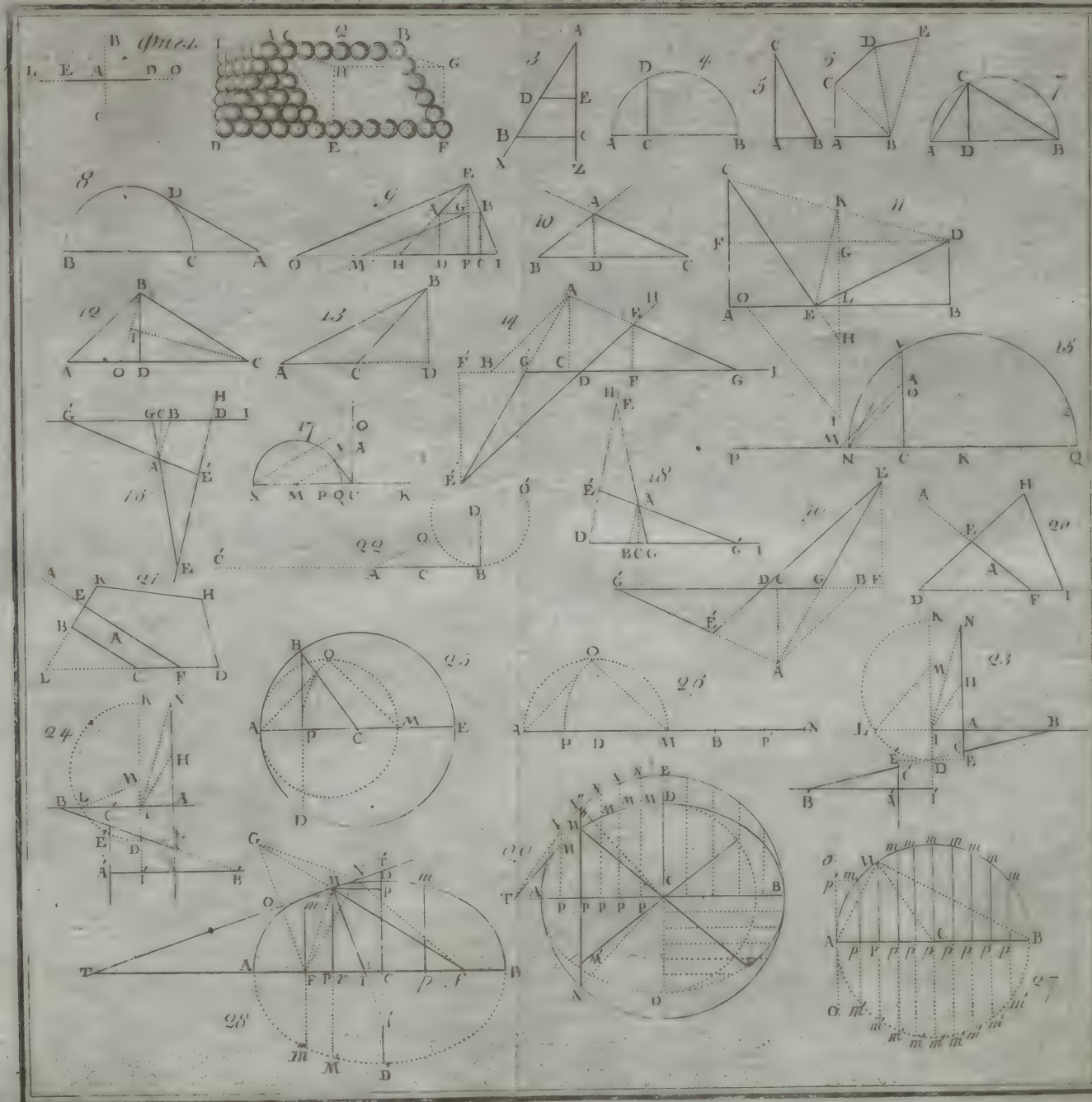
шенія нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ вопросовъ. *Стр.* 381 и слѣд.

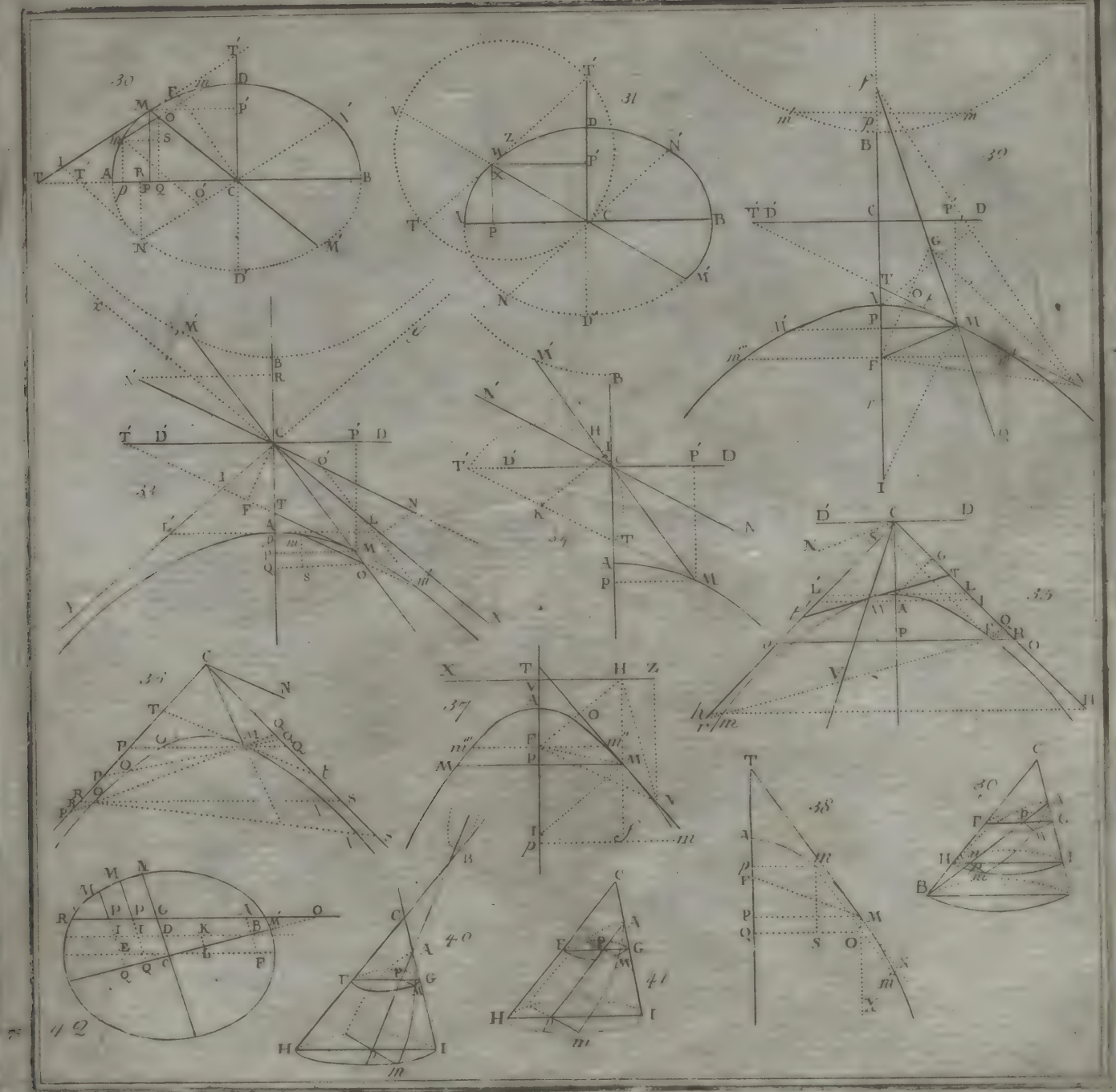
Примѣненіе тѣхъ же правилъ для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ вопросовъ. *Стр.* 394 и слѣд.

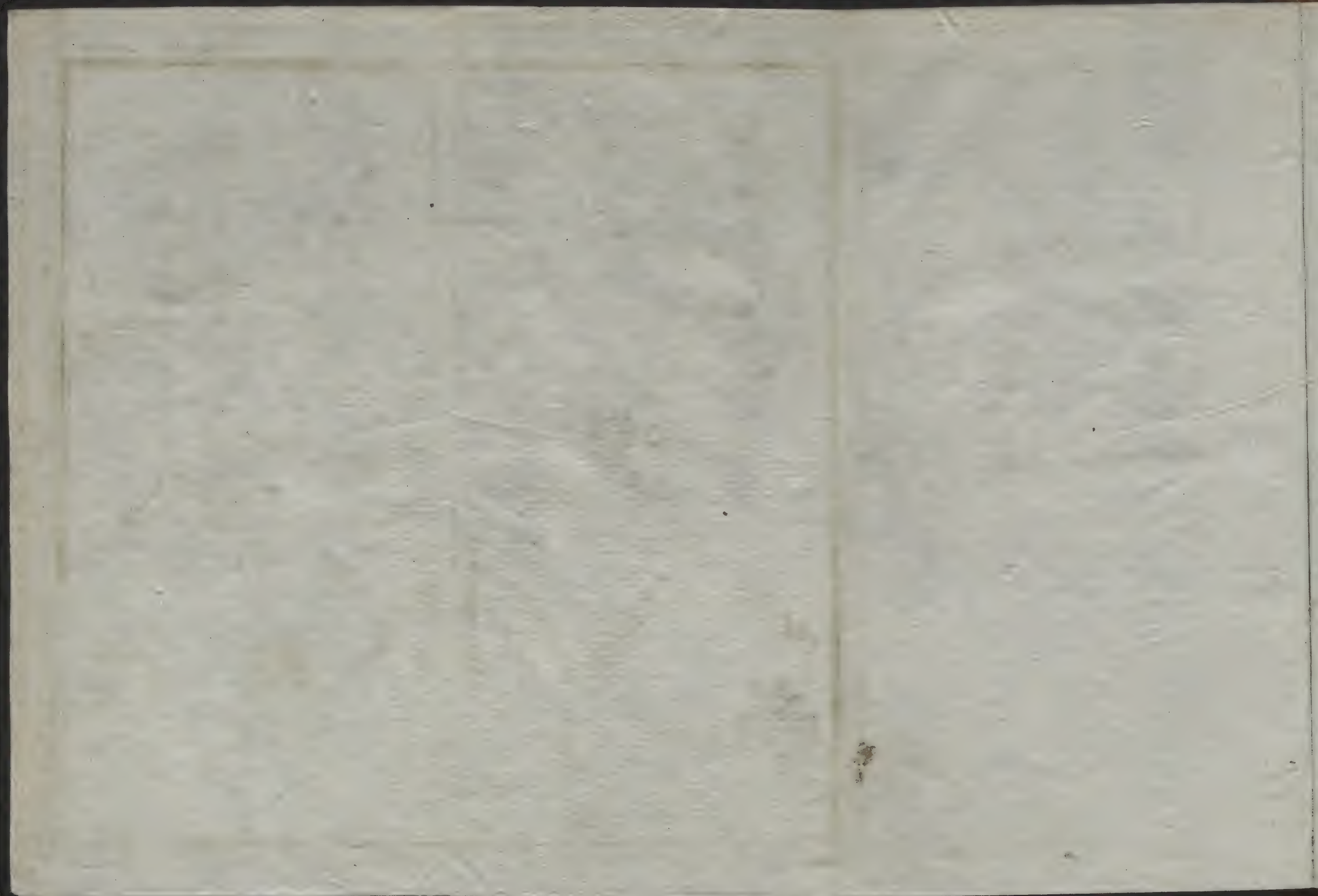
Конецъ Таблицы.

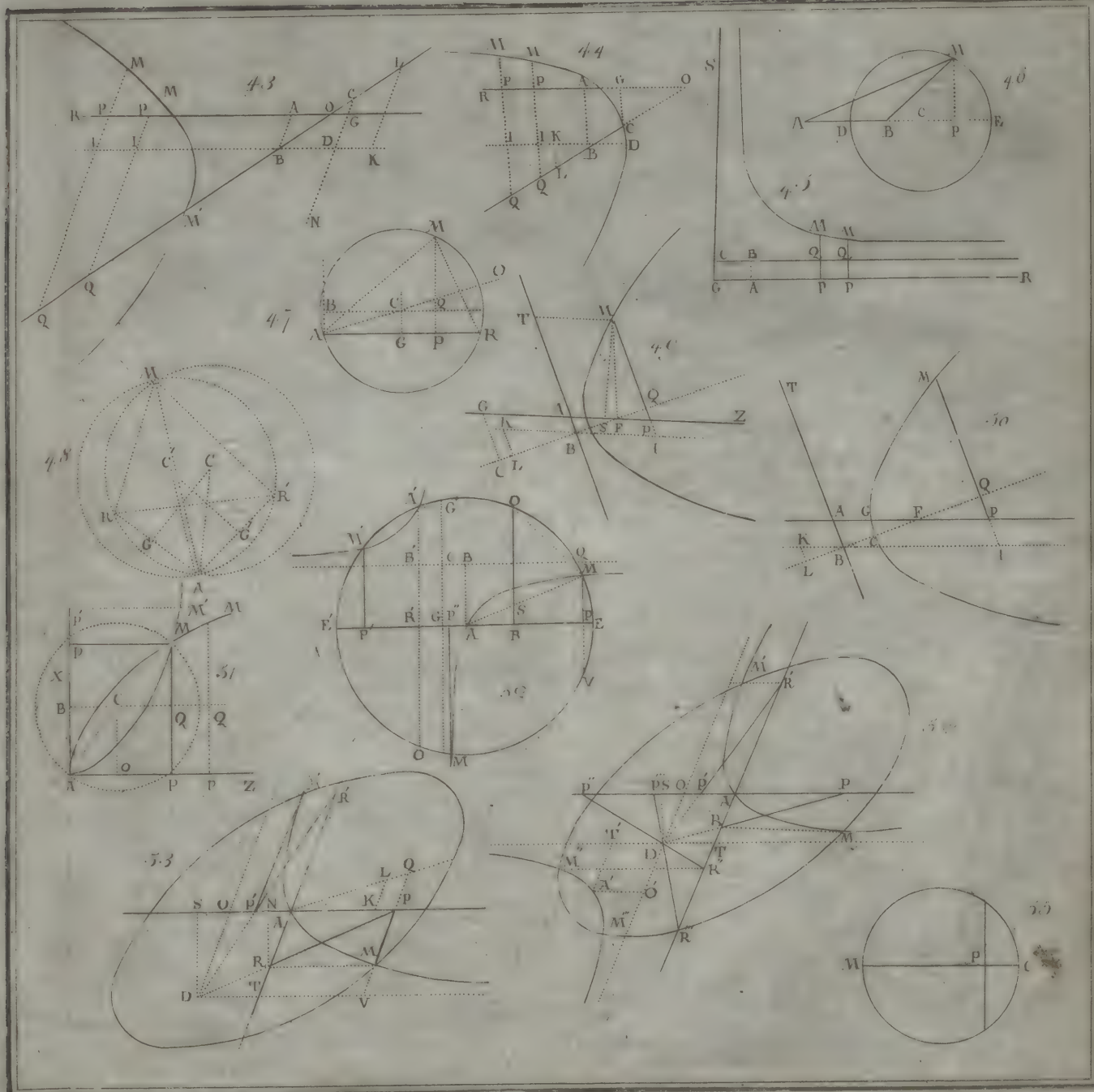
ПОГРѢШНОСТИ.

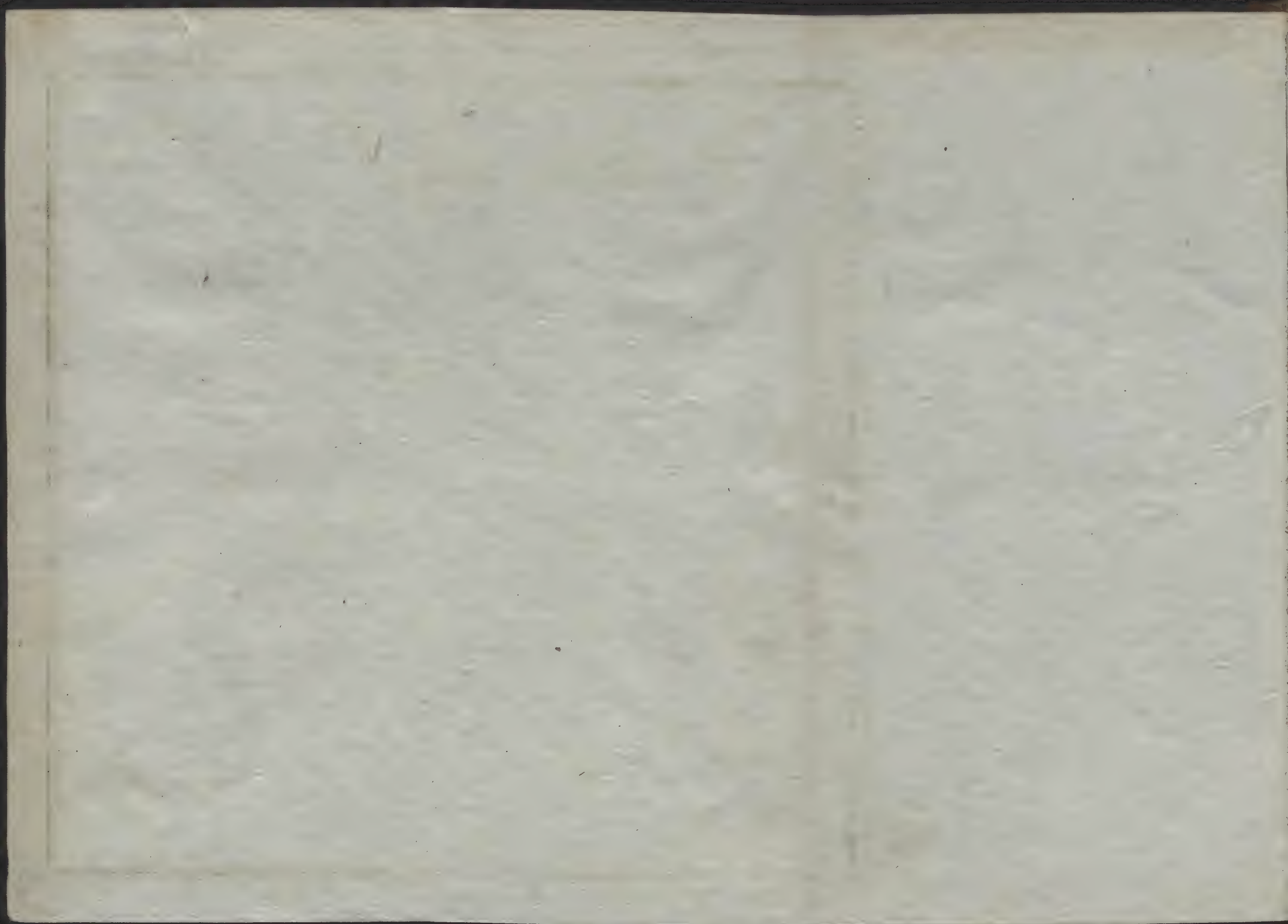
Стран.	Строк.	Напечатано.	Читай.
11	8	въ приведеніи	въ произведеніи
40	5	$5x = 21$	$5x = 21$
69	1	$ax =$	$ax +$
III	II	$x = -\frac{bc - ac}{2a - 2b}$	$x = -\frac{bc + ac}{2a - 2b}$
126	9 сниз.	$(a^2 + b^2)^{-1}$	$(a^2 - b^2)^{-1}$
150	1 сниз.	$(a - b)^{\frac{1}{2}}$	$(a + b)^{\frac{1}{2}}$
159	4	$(72 - 6y^2)^2$	$(72 - 6y^2)$
181	6	$\frac{1}{2}q + \sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}q - \sqrt{\quad}$
207	4 сниз.	$+ 3r^2$	$+ 3r$
		u	u
219	I	$qn - 1$	$q^n - 1$
225	I	$bab + d$	$ba + bd$
225	10	$(a + b)(a + b)$	$(a + b)(a - b)$
237	4	BC	BC (фиг. 10)
238	9	r^3	r^2
253	15	почки	почки A
	9	$\sqrt{s^3} : \sqrt{s^3}$	$\sqrt{s^3} : \sqrt{s^3}$
273	10	$\sqrt{s} : \sqrt{s}$	$\sqrt{s} : \sqrt{s}$
288	14	$MF = FMF$	$Mf = FMF$
320	8	GF	Gf
352	3	mO	mO
354	9	a	aa
		$\frac{px}{2m}$	$\frac{qx}{2m}$
377	4		
294	4	неопредѣленнымъ	опредѣленнымъ.

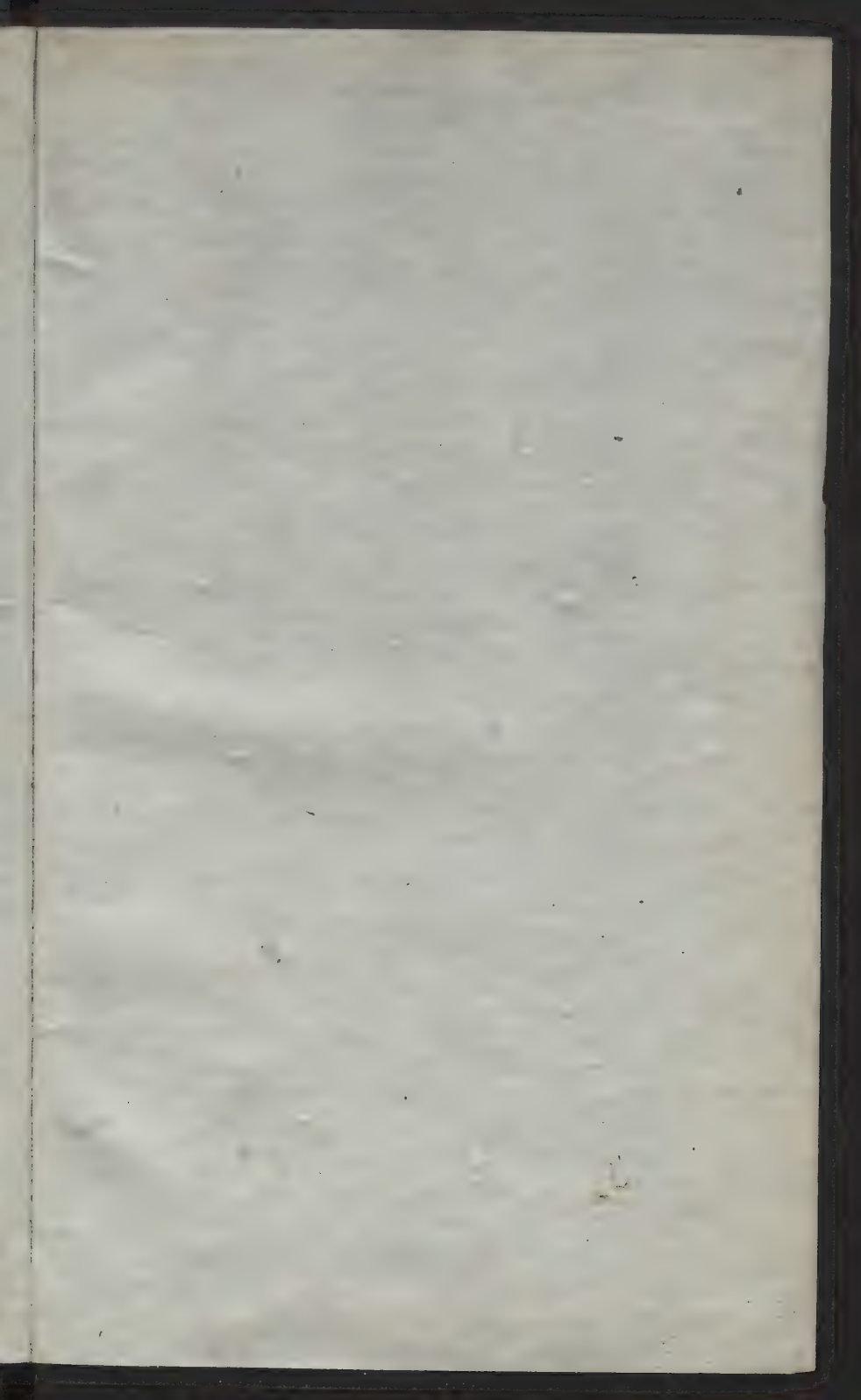








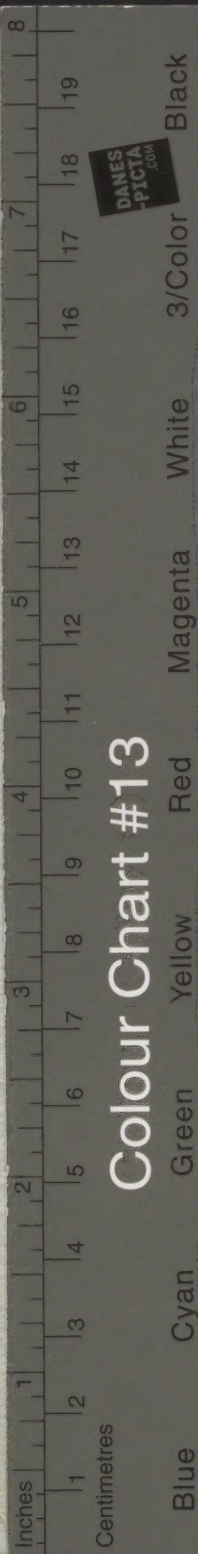




Из Собр. фонда
Библиотеки СССР
В. А. Д. Ленин

Всего
546

ms. 15328



40012
EKE COOP
BENIN
Alum
546

